Zeitverhalten und Stabilität linearer dynamischer Systeme

J. Höcht, R. Göhl, W. Englberger

18.4.2002 - 1.6.2002, 7.4.2004

Inhaltsverzeichnis:

Lernziele und Hilfen zur Durcharbeitung des Textes

"Zeitverhalten und Stabilität linearer dynamischer Systeme" ist das letzte Kapitel im Unterricht "Regelungs- und Steuerungstechnik". An Kenntnissen und Fertigkeiten wird daher die Beherrschung alle bisher behandelten Themenbereiche vorausgesetzt. Diese Voraussetzung erfüllen Sie, wenn Sie im seminaristischen Unterricht der Vorlesung kontinuierlich mitgearbeitet und die Versuche des Regelungstechnik-Praktikums gründlich und gewissenhaft vorbereitet haben, da zum Zeitpunkt der Durcharbeitung dieses Lerntextes bereits der größte Teil der Versuche des Praktikums von Ihnen durchgeführt wurde.

Im einzelnen müssen Sie folgendes beherrschen:

- Differentialgleichung eines Drossel-Speicher-Systems aufstellen können.
- Mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Differentialgleichung im Zeitbereich in die Übertragungsfunktion G(s) im Bildbereich (Frequenzbereich) transformieren können und umgekehrt.
- Übertragungsfunktionen umfangreicherer Systeme mit Hilfe der vier Grundrechnungsarten aus den elementaren Übertragungsfunktionen der Grundsysteme berechnen können (Zurückführung auf Hintereinander-, Parallel- und Rückführschaltung).
- Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen bis zur zweiten Ordnung selbständig lösen können. (Charakteristische Gleichung aus der Übertragungsfunktion aufstellen und lösen, spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden, Gesamtlösung ermitteln, wobei unbekannte Parameter aus der Stetigkeit der Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet werden)

Nach dem Studium dieses Textes sollen Sie

- bei einem System 1. Ordnung aus der Lage des Pols und den Koeffizienten der Übertragungsfunktion den Verlauf der Sprungantwort **quantitativ** zeichnen können (Kap. 1.1),
- bei einem System 2. Ordnung die Sprungantwort für unterschiedliche Lagen des Polpaars **im Vergleich qualitativ** zeichnen können (Kap. 1.2),
- die Stabilität eines Systems aus der Lage der Pole der Übertragungsfunktion beurteilen können (Kap.1.1 und 1.2),
- den Zusammenhang der Lage der Pole mit dem dynamischen Verhalten und der Stabilität erklären können (Erkenntnis aus Kap.1 insgesamt)
- das dynamische Verhalten eines Systems 2. Ordnung aus dem Dämpfungsgrad D bestimmen können (Kap. 2.1.1),
- die Stabilität eines Systems höherer Ordnung mit Hilfe der Übertragungsfunktion bis zu einem System 4.Ordnung durch Rechnung beurteilen können (Kap.2.1.2),
- das Vorgehen und die grundlegenden Zusammenhänge zur Beurteilung der Stabilität nach dem Nyquist-Verfahren erklären können (Kap.2.2).

Für der Durcharbeitung des Lerntextes noch einige Hinweise:

Die Lerninhalte aus Kap.1 haben Sie ja bereits in der Vorlesung und im Praktikum an unterschiedlichen Stellen kennengelernt. Kap.1 faßt sie noch einmal zusammen am Beispiel eines bzw. zweier geregelter Druckkessel. Die angegebenen Formeln müssen Sie daher nicht im einzelnen nochmals nachrechnen, Sie sollten deren prinzipielle Herleitung aus Ihrem Gedächtnis abrufen können. Die

Zahlenwerte sind deshalb angegeben, damit Sie bei Bedarf mit dSYs das Zeitverhalten auch quantitativ nachvollziehen könnten. Dieses Kapitel dürfte für Sie relativ zügig zu bearbeiten sein.

Völlig neu für Sie sind die Stabilitätskriterien in Kap.2. Insbesondere die Beurteilung des dynamischen Verhaltens mit Hilfe des Dämpfungsgrades D sollten Sie jederzeit aus dem Gedächtnis durchführen können (Kap.2.1.1).
Dagegen ist die Beurteilung der Stabilität nach dem Hurwitz-Kriterium nur mit Hilfe der angegebenen Formeln sinnvoll durchführbar (Kap.2.1.2). Hier brauchen Sie keine Formel auswendig zu lernen.

Wichtige Erkenntnisse, die Sie jederzeit aus dem Gedächtnis parat haben müssen, sind umrahmt. Darüber hinaus sind rechts neben dem Text kurze Hinweise zum gerade aktuellen Thema. Diese Hinweise sollen Ihnen auch optisch die Orientierung im Text erleichtern und Kernaussagen leichter im Gedächtnis verankern helfen.

Die abschließenden Aufgaben in Kap.3 sind Diplomprüfungen entnommen. Hier haben wir bewußt darauf verzichtet, als Lösungshinweise die zugehörige Kapitelnummer anzugeben. Nach gründlicher Durcharbeitung von Kap.1 und Kap.2 sollten Sie in der Lage sein, ohne größere Schwierigkeiten die Aufgaben zu bearbeiten.

Leider sind die Unterlagen, die Sie erhalten, nur schwarz/weiß. Aus didaktischen Gründen werden in diesem Text Farben verwendet. Eine weitere Erleichterung wäre es für Sie, wenn Sie den Text in Farbe sehen könnten. **Daher ist dieser Text als pdf-Datei auf der Lern-CD, die Sie im 4. Semester zur Vorbereitung des Versuchs 30 „Mehrspurige Ablaufsteuerungen" eingesetzt haben.**

Abschließend haben wir noch eine Bitte an Sie:

Dieser Text ist die bereits korrigierte Version eines speziell für das "Selbstgesteuerte Lernen" erstellten Lerntextes. Bitte nehmen Sie sich die Zeit, uns Rückmeldung zu geben, an welchen Stellen Sie Verständnisschwierigkeiten haben, was evtl. zu ausführlich ist oder welche Anregungen Sie uns generell geben können. Auch was Sie besonders gelungen finden und wir bei weiteren Texten wieder so machen sollen interessiert uns! Dazu ist nach der letzten Seite dieses Textes ein Fragebogen angefügt. Bitte bringen Sie diesen Fragebogen mit Ihren Kommentaren versehen zur Besprechung mit oder lassen Sie ihn uns auf andere Weise zukommen. Mit Hilfe Ihrer Rückmeldungen wollen wir den vorliegenden Lerntext weiter verbessern und Texte zu weiteren Themen gestalten.

Und nun guten Wirkungsgrad bei der Arbeit!

J. Höcht

Stabilität eines dynamischen Systems

Stabiles System

Ein System, das nach einer Anregung von selbst in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt, nachdem die Anregung verschwunden ist, heißt stabil. Ein Federpendel kehrt aufgrund der Reibungskräfte (Luft- und Lagerreibung) von selbst in die Ruhelage vor der Auslenkung zurück. Es ist also stabil. Diese Reibung wirkt immer **entgegen** der **Bewegungsrichtung**.

Stabilitätsgrenze

Wäre keine Reibung vorhanden, so würde das Pendel immer mit derselben Amplitude um seine ursprüngliche Ruhelage schwingen und nie zur Ruhe kommen. Diesen Zustand bezeichnet man als Stabilitätsgrenze.

Instabiles System

Gelänge es durch geeignete Maßnahmen (z.B. durch Rückkopplung), auf das Pendel eine anregende Kraft auszuüben, die in jedem Moment **in Bewegungsrichtung** wirken würde, so wäre die Folge eine über die technische Grenze anwachsende Amplitude bis zur Überdehnung der Feder.

Die **Stabilität** eines dynamischen Systems ist eine **absolut notwendige Eigenschaft** und hat daher bei der Regelung Vorrang vor allen anderen Zielen. Die folgenden Überlegungen gelten für lineare Systeme, also für Systeme, die durch lineare ("gewöhnliche") Differentialgleichungen in ihrem Zeitverhalten beschrieben werden können. Dabei bestimmen die Eigenwerte der Differentialgleichung, also die Nullstellen der Charakteristischen Gleichung, das dynamische Verhalten des Systems.

Nullstellen der Charakteristischen Gleichung verantwortlich für die Eigendynamik eines linearen Systems

Daher ist es sehr wichtig für das Verständnis dynamischer Systeme, den Zusammenhang zwischen dem Wert einer Nullstelle der Charakteristischen Gleichung und dem durch diese Nullstelle verursachten Zeitverhalten zu verstehen!

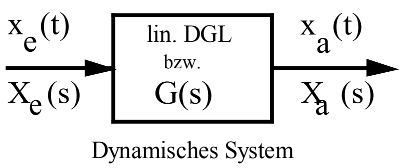


Abb. 1 Äquivalente Beschreibung im Zeit- und Frequenzbereich

Das Zeitverhalten mit der unabhängigen Variablen t mit der Dimension "Zeit" ist über die Laplace-Transformation eng verknüpft mit der Beschreibung im Bildbereich, deren unabhängige Variable s die Dimension 1/Zeit = Frequenz aufweist. Die Transformation der Differentialgleichung in den Bereich der komplexen Variablen s liefert eine rein algebraische Gleichung für die komplexen Amplituden $X_e(s)$ und $X_a(s)$ des Ein- und Ausgangssignals (Abb.1), wobei n-fach abgeleitete Größen zu einer Multiplikation der jeweiligen komplexen Amplitude mit s^n führen. Diese transformierte Differentialgleichung nach dem Quotienten der komplexen Amplituden aufgelöst ergibt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)}.$$

Das **Nenner**polynom dieser Übertragungsfunktion G(s) ist das **Charakteristische Polynom**! Daher sind die **Eigenwerte der Differentialgleichung** zugleich die **Pole der Übertragungsfunktion** und haben also für das zugehörige Verhalten im Zeitbereich die selbe Bedeutung.

Nenner der Übertragungsfunktion G(s) ist gleich dem Charakteristischen Polynom der Differentialgleichung

Im folgenden werden Sie daher zunächst intensiv den Zusammenhang zwischen der Lage von Polen der Übertragungsfunktion mit dem Zeitverhalten einschließlich des instabilen Verhaltens studieren, bevor Sie im Anschluß daran Kriterien kennenlernen, die ohne Wissen über die Lage der Eigenwerte Aufschluß über das dynamische Verhalten bzw. die Stabilität geben.

1 Lage der Pole der Übertragungsfunktion und Zeitverhalten des Systems

1.1 Systeme erster Ordnung

1.1.1 Drossel-Speicher-System - Pol der Übertragungsfunktion in der linken s-Halbebene

Drossel-Speicher-System ist ein Proportionales Verzögerungssystem 1. Ordnung (PT_1-System)

Die Differentialgleichung des Drossels-Speicher-Systems (Abb.2) haben Sie selbst in der Vorlesung entwickelt aus den physikalischen Zusammenhängen zwischen der Druckdifferenz $x_e(t) - x_a(t)$ an einem linearen Widerstand (laminare Strömung!) und dem Massenstrom i(t) durch diesen Widerstand sowie aus dem Zusammenhang zwischen Strom i(t) in den Druckkessel mit der Kapazität C und dem Druck x_a in diesem Kessel:

$$\dot{x}_a \cdot T + x_a = x_e$$

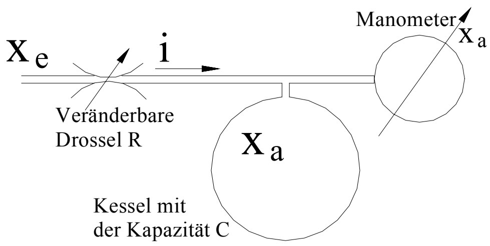


Abb. 2: Drossel-Speicher-System

Beaufschlagt man den Eingang dieses Drossel-Speicher-Systems mit einem Sprung von 0 auf 100%

$$x_e(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ so}$$

ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $x_a(t)$ zum Zeitpunkt t = 0 (Anfangsbedingung der inhomogenen DGl):

$$x_a(t) = 1 - e^{-\sigma \cdot t} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{mit } T = T_4 = R \cdot C$$

Gleichung der Sprungantwort des PT_1-Systems

(**Achtung! Das σ in der Lösung der Differentialgleichung hat NICHTS mit dem Einheitssprung $\sigma(t)$ zu tun, sondern ist lediglich der Realteil der Lösung s in der komplexen Ebene**)

Für die weiteren Betrachtungen wird T verändert und nimmt nacheinander die Werte T_3, T_2 und T_1 an.

Übertragungsfunktion des PT_1-Systems

Betrachtet man die zur Differentialgleichung äquivalente Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s \cdot T + 1}$, so erkennt man, daß die Lösung der charakteristischen Gleichung auf die rein reelle Nullstelle $s = -\sigma = -\frac{1}{T}$ führt. Dies ist gleichzeitig auch, wie oben erläutert, der Pol der Übertragungsfunktion und im Zeitbereich die Abkling-Zeitkonstante T in der Lösung der Differentialgleichung. Abb.3 zeigt die Lage des Pols der Übertragungsfunktion für $\sigma = \sigma_4$ in der komplexen s-Ebene sowie im Zeitbereich die Reaktion von x_a auf den Sprung $x_e(t) = \sigma(t)$ des Eingangssignals.

Reeller Pol bei $s = -\sigma_4 = -1/T_4$

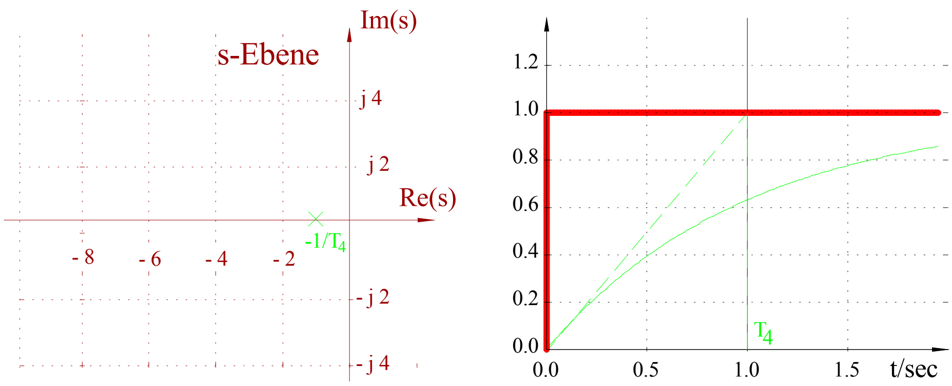


Abb. 3: Drossel-Speicher-System: Zeitverhalten und Lage des Pols

Die Zeitkonstante des Systems hat den Wert $T_4 = 1\,\text{sec}$. Der Pol der Übertragungsfunktion liegt also bei $s = -\sigma_4 = -1/\text{sec}$.
Verkleinert man die Zeitkonstante auf die Hälfte mit $T_3 = T_4/2$, so verläuft nicht nur der Einschwingvorgang doppelt so schnell, auch der Pol der Übertragungsfunktion ist mit $s = -\sigma_3 = -2 \cdot \sigma_4 = -2/T_4 = -2/\text{sec}$ doppelt so weit von der imaginären Achse entfernt wie σ_4 (Abb.4).

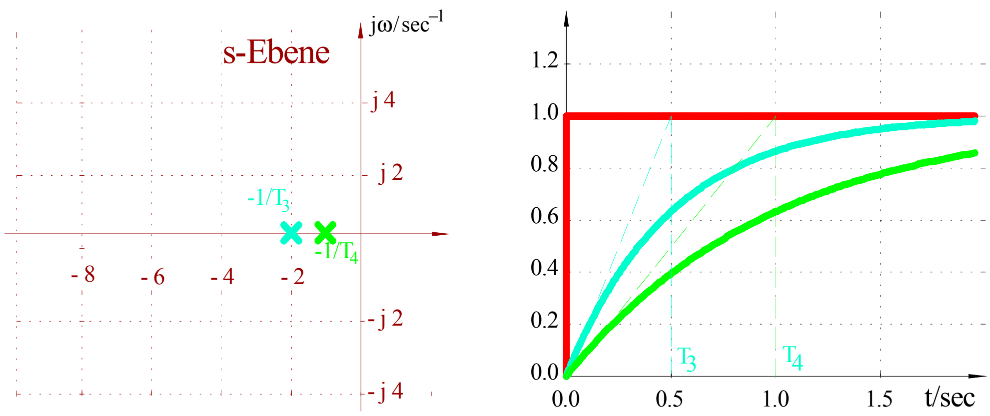


Abb. 4: Halbierung der Einschwingdauer durch Verdopplung des Realteils des Pols

Fährt man mit der Vergrößerung des negativen Realteils der Polstelle fort, so schwingt das Drossel-Speicher-System immer schneller auf seinen stationären Endwert ein (Abb.5).

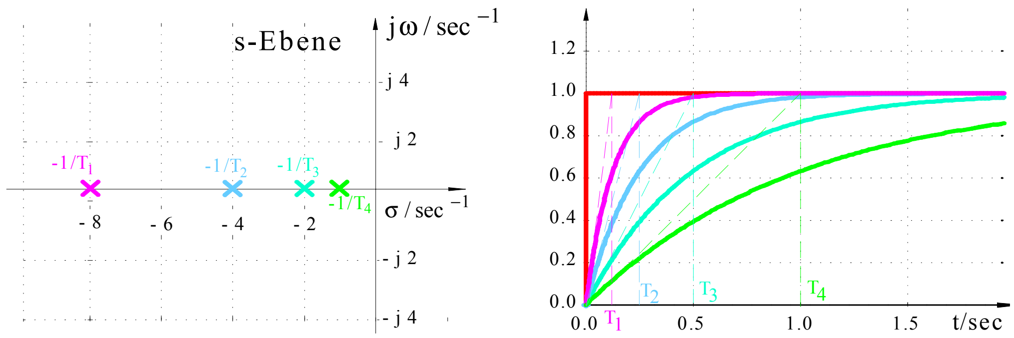


Abb. 5 Zeitverhalten des Drossel-Speicher-Systems bei zunehmendem Abstand des Übertragungspols von der imaginären Achse

Größere Entfernung des Pols von der imaginären Achse bewirkt schnelleres Einschwingen des Systems auf den Ausgleichswert

Als wichtige Erkenntnis aus diesem Verhalten wollen wir folgende Aussage festhalten:

Je weiter weg ein Pol der Übertragungsfunktion innerhalb der negativen s-Halbebene von der imaginären Achse liegt, desto schneller schwingt das System auf seinen Ausgleichswert ein.

1.1.2 Bewegung des Übertragungspols nach rechts über die imaginäre Achse hinaus

Im Versuch 1 des Praktikums koppeln Sie den Ausgang x_a eines Drossel-Speicher-Systems mit der Zeitkonstante T und dem proportionalen Übertragungsbeiwert $K_P = 1$ über ein Additionsrelais an den Eingang zurück und erzeugen damit ein IT_0-System. Diese Anordnung werden wir nun geringfügig abwandeln, indem wir in den Rückkopplungszweig ein Proportionalglied mit **einstellbarer** Verstärkung K schalten (Abb.6). K lassen wir dabei wandern von K = 0 (PT_1-Glied ohne Rückkopplung) über K = 1 (= Konfiguration des Praktikumversuchs) bis K = 1.5.

PT_1-System mit positiver Rückkopplung ("Mitkopplung") führt mit zunehmendem K zu einem instabilen System

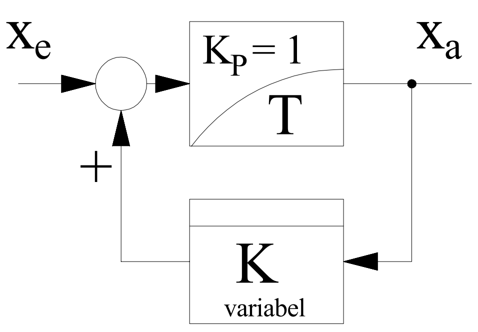


Abb. 6 PT1-System mit positiver Rückkopplung ("Mitkopplung")

Da Sie mittlerweile die Zusammenhänge zwischen Zeitbereich (Differentialgleichung) und Bildbereich (s-Ebene) beherrschen, können wir uns im folgenden auf das Aufstellen der Übertragungsfunktion G(s) beschränken. Sie lautet für das Blockschaltbild in Abb. 6:

Übertragungsfunktion der Mitkopplungsschaltung

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{1}{s \cdot T + 1 - K} = \frac{\frac{1}{1-K}}{s \cdot \frac{T}{1-K} + 1} .$$

Dieses System wird ebenfalls wieder mit einem Sprung beaufschlagt, nun aber allgemein mit der Sprungamplitude x_{e0}. Dieser Eingangssprung läßt sich wieder mit Hilfe des Einheitssprungs $\sigma(t)$ von 0 auf 100% darstellen:

Eingangssignal ist Sprung von 0 auf x_{e0}

$$x_e(t) = x_{e0} \cdot \sigma(t)$$

Der Ausgleichswert $x_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} x_a(t)$ für $t \to \infty$ folgt aus dem Endwertsatz der Laplacetransformation: $x_\infty = x_{e0} \cdot \frac{1}{1-K}$. Mit den Zahlenwerten $T = 2.5$ sec und $K = 0$ bzw. $K = K_1 = 0.5$ ergeben sich für die jeweilige Übertragungsfunktion als Pol die Werte

Ausgleichswert x_∞ für $t \to \infty$

$$s_0 = -\sigma_0 = -1/T_0 = -1/2.5 \cdot \sec = -0.4 \cdot \sec^{-1} \quad \text{(ohne Rückkopplung)}$$

sowie

$$s_1 = -\sigma_1 = -1/T_1 = -1/5.0 \cdot \sec = -0.2 \cdot \sec^{-1} \quad \text{(P-Rückkopplung } K = 0.5\text{)}$$

Die Ausgleichswerte liegen bei $x_{0_\infty} = 1$ bzw. $x_{1_\infty} = 2$ (Abb.7). Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 1.Ordnung lautet somit:

Gleichung der Sprungantwort des rückgekoppelten Systems

$$x_a(t) = \frac{x_{e0}}{1-K} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T/(1-K)}} \right)$$

Abb. 7 zeigt die Lage der beiden Übertragungspole sowie die zugehörigen Sprungantworten im Zeitbereich. Der Einfachheit halber wurde bei der Zeichnung wieder die Sprungamplitude $x_{e0} = 1$ gewählt.

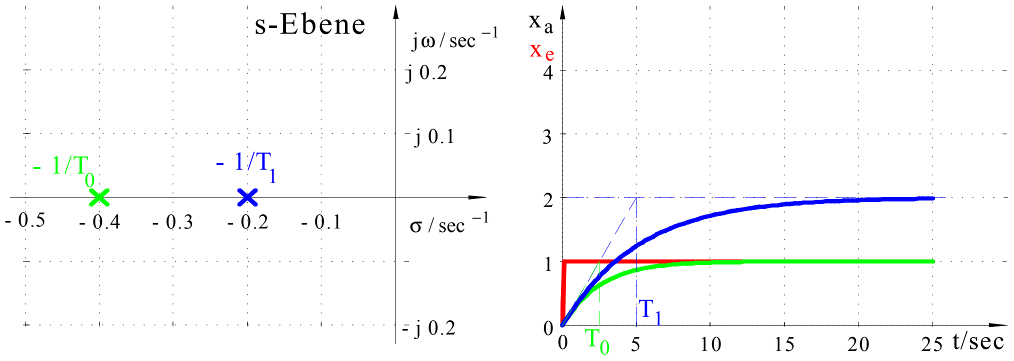


Abb. 7 Pol des PT_1-Systems wandert in Richtung imaginäre Achse

Pol wandert in Richtung der imaginären Achse $\Rightarrow$ zunehmende Dauer des Einschwingvorgangs

Wie man sieht, dauert das Einschwingen auf den Ausgleichswert mit abnehmendem Abstand des Pols zur imaginären Achse immer länger. Läßt man schließlich K über K = 0.75 nach K = 1 wandern, dann wird dieser Beharrungswert immer später oder - im Falle K = 1 - nie erreicht. Die Sprungantwort wächst also im letzten Fall über alle Schranken und wir sind an der Grenze der Stabilität angekommen. Der Pol liegt im Ursprung (Abb.8) und aus der Übertragungsfunktion sehen wir, daß es sich um ein IT_0-Glied, also einen reinen Integrator ohne Verzögerung handelt:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot T_0} .$$

Pol im Koordinatenursprung für K = 1: System ohne Ausgleich (I-Glied)

Stabilitätsgrenze!

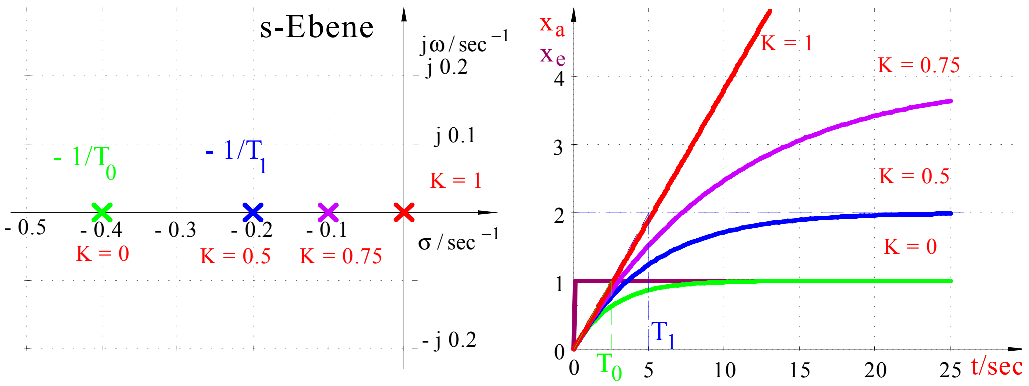


Abb. 8 Erreichen der Stabilitätsgrenze für K = 1, reines unverzögertes Integralglied (IT_0-System)

Erhöhen wir K weiter auf Werte größer als 1, dann wandert der Pol in die rechte s-Halbebene und das System wird instabil, wie man an der Lösung der Differentialgleichung sieht:

Instabiles System durch positiven Exponenten in der Sprungantwort

$$x_a(t) = \frac{x_{e0}}{1-K} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T/(1-K)}} \right)$$

Der Exponent wird für $K > 1$ positiv und die Exponentialfunktion übersteigt alle Schranken (Abb.9):

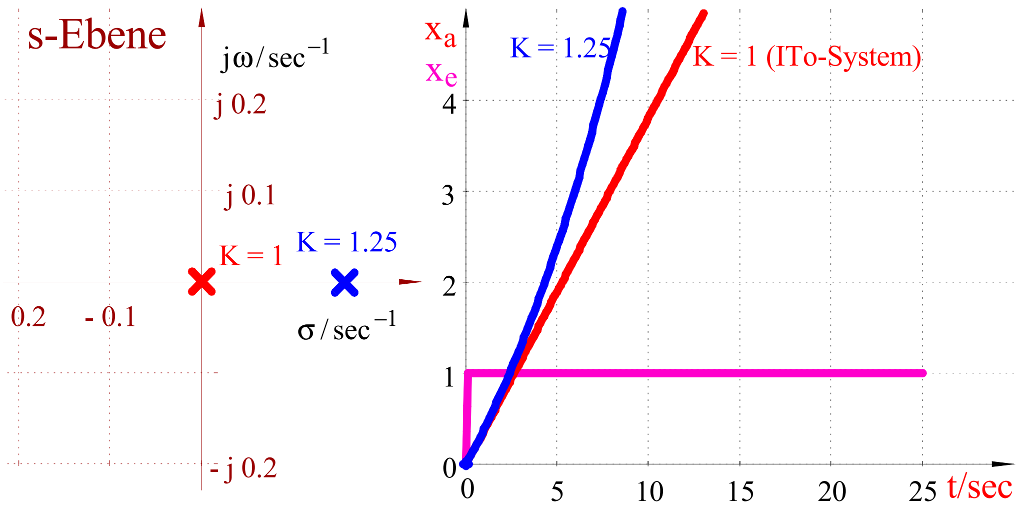


Abb. 9 Instabiles System für K = 1.25, Pol in der rechten s-Halbebene

Pol in der rechten s-Halbebene:

Instabiles System

Die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Betrachtungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- **Je näher ein Pol innerhalb der negativen s-Halbebene an der imaginären Achse liegt, desto später wird der Ausgleichswert ("Beharrungswert") x_∞ erreicht.**
- **Liegt der Pol im Ursprung des Koordinatensystems, dann wird kein Ausgleichswert erreicht, sondern die Zeitfunktion steigt geradlinig an - es handelt sich um ein Integralsystem, ein "System ohne Ausgleich" wie z.B. eine Füllstandsstrecke. Dies ist die Stabilitätsgrenze!**
- **Liegt der Pol in der rechten s-Halbebene, dann wächst die zugehörige Zeitfunktion exponentiell über alle Schranken, das System ist instabil.**

1.2 Systeme 2. Ordnung
1.2.1 Systeme mit reellen Polen

Das Verhalten eines dynamischen Systems mit 2 reellen Polen werden sie nun an der Regelung zweier hintereinander geschalteter Drossel-Speicher-Systeme studieren, wie sie beispielsweise in der Druckversorgung der Praktika Regelungs- und Steuerungstechnik zu finden sind. Die Regelung soll hier durch einen stetigen P-Regler erfolgen, dessen Verstärkung K_R kontinuierlich von positiven ("Gegenkopplung") bis hin zu negativen Werten ("Mitkopplung") einstellbar ist (Abb.10).

Regelung des Drucks in zwei hintereinandergeschalteten Druckkesseln durch einen P-Regler

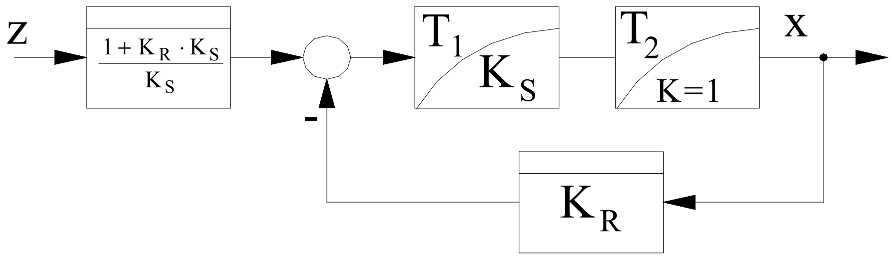


Abb. 10 PT2-System und Regelung mit P-Regler

(**Anmerkung:** In Versuch 41, "Simulation dynamischer Syseme mit dem PC" haben sie gesehen, daß man zwei direkt hintereinander geschaltete Drossel-Speicher-Systeme mit **gleichen** Zeitkonstanten durch zwei hintereinander geschaltete Blöcke mit **unterschiedlichen** Zeitkonstanten darstellen kann. Davon wird hier Gebrauch gemacht.
Eine andere Möglichkeit wäre die Darstellung durch zwei PT_1-Blöcke mit gleichen Zeitkonstanten, wobei der Ausgang des zweiten Blocks über ein unverzögertes Differenzierglied als Gegenkopplungssignal an den ersten Block zurückgeführt wird. Diese zweite Möglichkeit verwenden Sie bei der Modellierung des Kreuzbalgreglers)

Gleichen Ausgleichswert erzwingen, um das dynamische Verhalten besser vergleichen zu können

Wir wollen nur das **dynamische** Verhalten für unterschiedliche Reglerverstärkungen K_R vergleichen. Aus diesem Grund wird die Störgröße z mit dem Faktor $\frac{1 + K_R \cdot K_S}{K_S}$ multipliziert, so daß bei allen Reglerverstärkungen K_R immer derselbe Ausgleichswert $x_\infty = 1$ erreicht wird für $t \to \infty$. Auch hier verzichten wir wieder auf das Aufstellen der Differentialgleichung und begnügen uns mit der Übertragungsfunktion G(s):

$$G(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{1 + K_R \cdot K_S}{K_S} \cdot \frac{K_S}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1 + K_R \cdot K_S} =$$

$$= \frac{1 + K_R \cdot K_S}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1 + K_R \cdot K_S}$$

Da wir nur an den Nullstellen des Nenners, also den Polen der Übertragungsfunktion interessiert sind verzichten wir hier darauf, das konstante Glied des Nenners zu 1 zu machen, da diese Maßnahme keinen Einfluß auf diese Nullstellen hat.

Die Regelstrecke weise die Zeitkonstanten $T_1 = 1/2\,\text{sec}$ und $T_2 = 1/8\,\text{sec}$ auf. Da es sich um Druckkessel handelt, gilt $K_S = 1$.

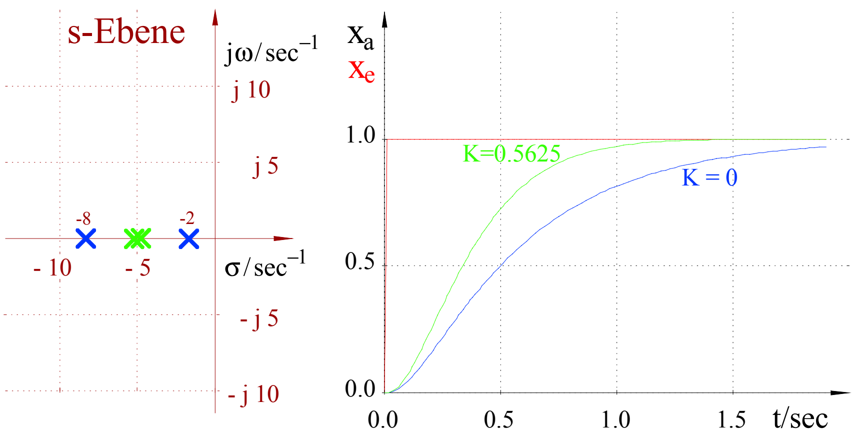
1.2.1.1 Gegenkopplung, Reglerverstärkung $K_R \geqq 0$

Die Charakteristische Gleichung hat die Lösungen

Zwei reelle Pole der Übertragungsfunktion bei $-\sigma_1$ und $-\sigma_2$

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)^2 - \frac{4\cdot K_R\cdot K_S}{T_1\cdot T_2}}$$
$$= -\sigma_{1/2}$$

Zunächst lassen wir die Verstärkung K_R von $K_R = 0$ bis zu einem Wert $K_R = K_{R_{AP}}$ wachsen, bei dem der Wert unter der Wurzel Null wird und das System eine Doppellösung, die Übertragungsfunktion also einen Doppelpol besitzt. Für $K = 0$ besteht keine Rückkopplung und die beiden Pole liegen bei $s_1 = -\sigma_1 = -1/T_1$ und $s_2 = -\sigma_2 = -1/T_2$. Wird die Diskriminante bei $K_R = K_{R_{AP}}$ zu Null, so liegt der Doppelpol beim arithmetischen Mittelwert der Pole des Systems ohne Rückkopplung, also bei $s = -\sigma = -0.5\cdot(1/T_1 + 1/T_2)$. Abb.11 zeigt den zeitlichen Verlauf beider Sprungantworten und die zugehörigen Pole der Übertragungsfunktion.



Mit zunehmender Verstärkung wandern die Pole zum arithmetischen Mittelwert ihrer ursprünglichen Lage

Abb. 11 Zwei reelle Pole wandern aufeinander zu

Doppelpol:

Aperiodischer Grenzfall = schnellstmögliches aperiodisches Einschwingen auf den Ausgleichswert

Betrachten wir nun die Wanderung der beiden Pole und das zugehörige dynamische Verhalten des Systems 2. Ordnung. Beim System 1. Ordnung haben wir gesehen, daß ein Pol, der sich der imaginären Achse nähert, zu langsameren Einschwingen führt, während ein sich entfernender Pol das System schneller macht. Im vorliegenden Fall entfernt sich ein sehr nahe der imaginären Achse liegender Pol, während ein weiterer, zunächst vier mal so weit entfernter Pol sich der imaginären Achse nähert. Der Einfluß des sich entfernenden Pols nimmt aber ganz offensichtlich schneller ab, als der Einfluß des sich nähernden Pols zunimmt. Somit haben wir, wenn beide Pole sich zu einem Doppelpol treffen, das schnellste aperiodische Einschwingen des Systems, den "aperiodischen Grenzfall".

1.2.1.2 Mitkopplung, Reglerverstärkung $K_R \leq 0$

Bei negativem Vorzeichen der Reglerverstärkung $K_R < 0$ wird wegen des weiteren Minuszeichens bei der Summationsstelle (siehe Abb.10 zwei Seiten vorher) die Regelgröße x insgesamt mit positivem Vorzeichen zurückgeführt. Eine Vergrößerung des Ausgangssignals x hat damit auch eine Vergrößerung des Streckeneingangs am ersten PT_1-System zur Folge. Bedenkt man die obigen Ergebnisse im Zeitverhalten und bei der Wanderung der Pole, so wird bei sich vergrößerndem K_R der nähere Pol auf die imaginäre Achse zuwandern und diese sogar überschreiten, während der weiter entfernte Pol noch weiter weg wandert. Für $K_R = -1$ würde das Eingangssignal des Systems durch das erste P-Glied mit der Übertragungsfunktion $(1 + K_R \cdot K_S)/K_S$ zu Null gesetzt, so daß es gar nicht erst an die Rückkopplungsschaltung gelangen würde. Aus diesem Grunde untersuchen wir hier ein System, bei dem dieses P-Glied am Eingang fehlt (Abb.12), wie dies auch beim rückgekoppelten PT_1-System unter 1.1.1 erfolgte.

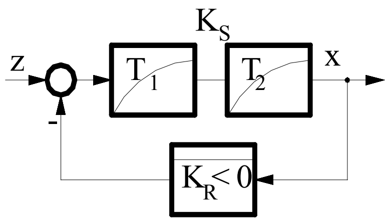


Abb. 12 Untersuchung des Verhaltens bei Mitkopplung

PT_2-System

Mitkopplung durch $K_R < 0$

Die Zeitkonstanten der Strecke betragen $T_1 = 0.5\,\text{sec}$ und $T_2 = 0.125\,\text{sec}$. Die Streckenverstärkung ist wieder $K_S = 1$. Zunächst wird die Reglerverstärkung, ausgehend von $K_R = 0$, in zwei weiteren Stufen auf $K_R = -0.5$ und $K_R = -0.75$ vergrößert. Erwartungsgemäß wandern die Pole der Übertragungsfunktion auseinander und der rechte Pol nähert sich der imaginären Achse (Abb.13). Auch dominiert der Einfluß des näher an der imaginären Achse liegenden Pols. Der Ausgleichswert wird immer später erreicht.

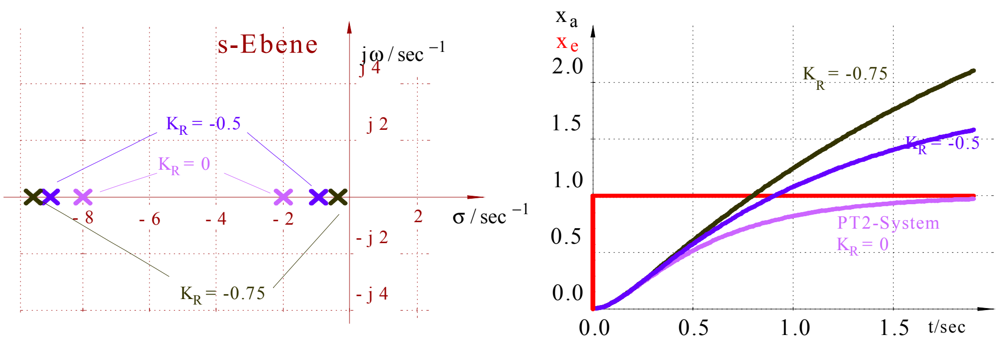


Abb. 13 Annäherung des rechten Pols an die imaginäre Achse

Nullstellen der Charakteristischen Gleichung sind verantwortlich für die Eigendynamik eines linearen Systems

Wählt man schließlich $K_R = -1$, so liegt einer der beiden Pole im Ursprung der s-Ebene, aus dem PT_2-System ist ein IT_1-System, also ein System ohne Ausgleich mit Verzögerung erster Ordnung entstanden (Abb.14).

Dieses IT_1-Verhalten läßt sich auch an der Übertragungsfunktion G(s) unmittelbar ablesen:

Übertragungsfunktion des rückgekoppelten PT_2-Systems für $K_R = -1$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 \cdot T_1 \cdot T_2 + s \cdot (T_1 + T_2)} = \frac{1}{s \cdot (T_1 + T_2) \cdot \left(s \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{s \cdot (T_1 + T_2)}}{s \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} + 1}$$

IT_1-System

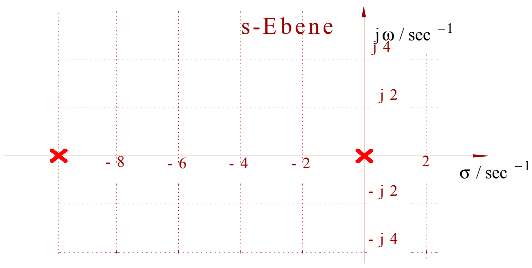
Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\dot{x} \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} + x = \frac{1}{T_1 + T_2} \cdot \int z(t) \cdot dt$$

Abb.14 zeigt die Lage der Pole und das daraus resultierende Zeitverhalten. Zum Vergleich ist im Zeitdiagramm auch die Sprungantwort eines IT_0-Glieds mit derselben Integrationszeitkonstanten $T_I = T_1 + T_2$ gezeichnet.

Einer der beiden Pole liegt bei s = 0:

Sprungantwort des IT_1-Systems



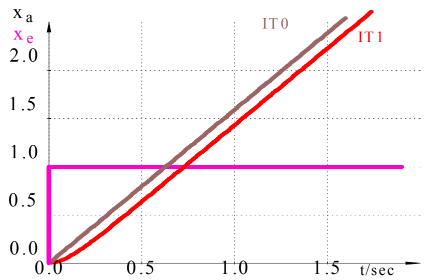


Abb. 14 IT_1-Glied im Vergleich zum IT_0-Glied mit gleicher Integrationszeitkonstante

Die Asymptote des IT_1-Gliedes schneidet die Zeitachse bei $\frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = 0.10\,\text{sec}$.

Dies ergibt sich aus der Lösung der Differentialgleichung für $z(t) = \sigma(t)$ als Eingangssignal:

$$x(t) = \frac{T_1 \cdot T_2}{(T_1 + T_2)^2} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1 + T_2}} - 1 \right) + \frac{t}{T_1 + T_2}$$

Die Asymptote dieses Ausgangssignals $x(t)$ schneidet die Abszisse beim angegebenen Zeitpunkt.

In einem letzten Schritt erhöhen wir nun die Verstärkung des Reglers auf $K_R = -1.25$. Während der linke Pol $s_2 = -\sigma_2$ noch weiter weg in die linke s-Halbebene abgewandert ist, liegt der rechte Pol $s_1 = +\sigma_1$ der Übertragungsfunktion nun auf der reellen Achse in der **rechten** s-Halbebene. Damit wird einer der Exponenten in der Lösung der Differentialgleichung positiv und die Zeitfunktion wächst über alle Schranken (Abb.15).

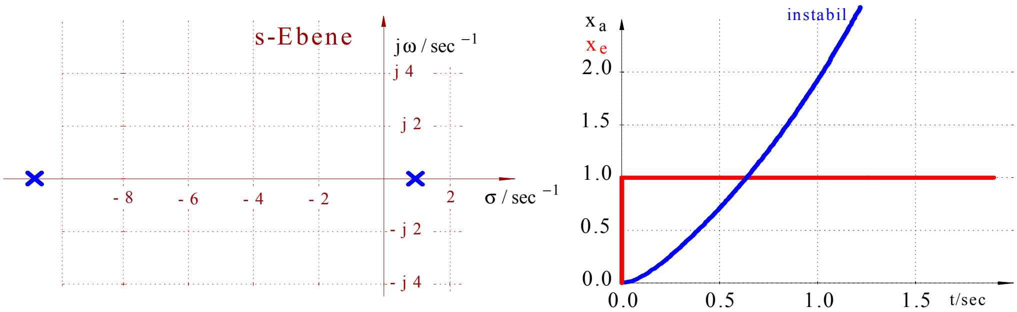


Abb. 15 Instabiles System durch einen reellen Pol in der rechten s-Halbebene

Zwei reelle Pole, einer davon in der rechten s-Halbebene ⇒ exponentieller Anstieg der Sprungantwort

Instabiles System

Die Erkenntnisse aus diesem Kapitel sind im folgenden kurz zusammengefaßt:

- **Reelle Pole erzeugen immer ein aperiodisches Einschwingen des Systems**

- **Bei einem reellen Doppelpol schwingt das System am schnellsten aperiodisch auf seinen Ausgleichswert ein ("Aperiodischer Grenzfall")**

- **Der näher an der imaginären Achse liegende Pol bestimmt im wesentlichen das Zeitverhalten ("dominanter Pol")**

- **Je näher ein (dominanter) Pol an der imaginären Achse liegt, desto länger dauert der von ihm verursachte Einschwingvorgang**

- **Liegt ein Pol im Ursprung, dann liegt ein "System ohne Ausgleich mit Verzögerung ", ein IT_1-System vor.**

- **Liegt wenigstens einer der reellen Pole in der rechten s-Halbebene, dann wächst die Sprungantwort exponentiell über alle Schranken, das System ist instabil.**

1.2.2 Systeme mit einem konjugiert komplexen Polpaar
1.2.2.1 Änderung des Imaginärteils bei konstantem Realteil

Periodisch schwingungsfähiges System 2. Ordnung

Zur Untersuchung des Verhaltens gehen wir wie in 1.2.1 wieder von der Regelung zweier hintereinander geschalteter Druckkessel aus und sorgen für einen von der Verstärkung K_S unabhängigen Ausgleichswert, indem wir ebenfalls die Störgroße mit dem Faktor $\frac{1+K_R \cdot K_S}{K_S}$ multiplizieren. Abb. 16 zeigt nochmals das Blockschaltbild aus Abb.10 für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens.

Gleicher Regelkreis wie unter 1.2.1, jedoch K_R größer als 0.625

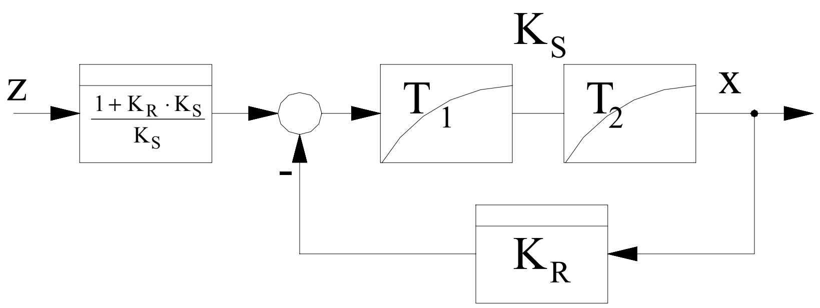


Abb. 16 Blockschaltbild zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens bei einem konjugiert komplexen Polpaar

Ausgangspunkt ist die Verstärkung $K_R = 0.5625$, bei der die beiden Pole auf das arithmetische Mittel der Lage bei ungeregeltem System zu liegen kommen (aperiodischer Grenzfall). Von dieser Verstärkung ausgehend erhöhen wir K_R in zwei Schritten auf $K_R = 1.0$ und $K_R = 5.7$. Die Pole wandern dabei von

Vom aperiodischen Grenzfall bis zum periodischen Einschwingen auf den Ausgleichswert

$s = -\sigma = -5\,\text{sec}^{-1}$ über

$s = -\sigma \pm j\omega = -5\,\text{sec}^{-1} \pm j5\,\text{sec}^{-1}$ bis hin zu

$s = -\sigma \pm j\omega = -5\,\text{sec}^{-1} \pm j10\,\text{sec}^{-1}$.

Als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. beim Einheitssprung $z(t) = \sigma(t)$ als Eingangssignal ergibt sich für das konjugiert komplexe Nullstellenpaar $s_{1/2} = -\sigma \pm j\omega$:

Imaginärteil des Polpaars bestimmt die Einschwingfrequenz

$$x(t) = 1 - e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left(\frac{\sigma}{\omega} \cdot \sin\omega \cdot t + \cos\omega \cdot t \right)$$

Realteil bestimmt Dauer des Einschwingvorgangs

Das System schwingt also mit einem **Imaginärteil ω** nicht mehr aperiodisch, sondern **periodisch** auf seinen Ausgleichswert ein. Wie man sieht, ist der Imaginärteil ω der Pole allein für die Frequenz der Schwingung verantwortlich, während der Realteil σ allein für das Abklingen dieser Schwingung sorgt (Abb.17).

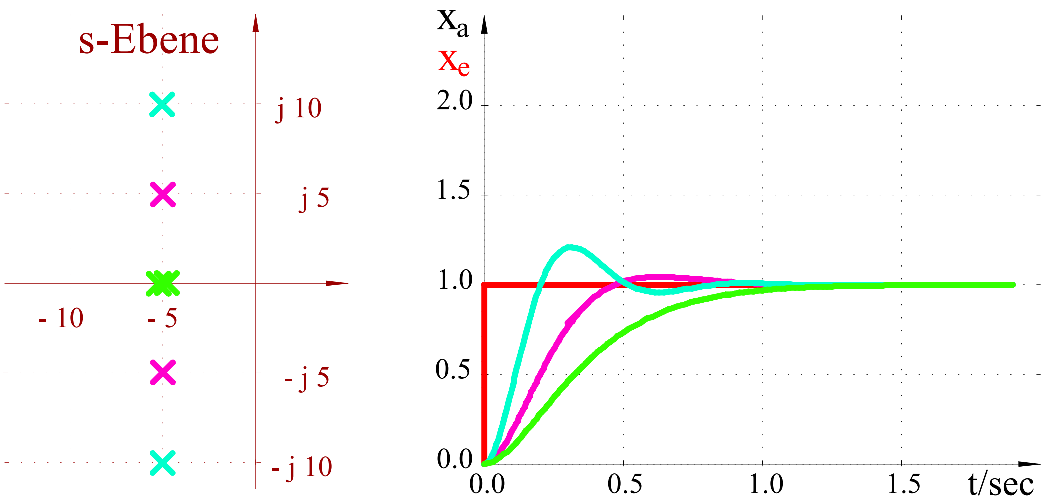


Abb. 17 Einschwingverhalten bei unterschiedlichem Imaginärteil ω und gleichem Realteil σ der Pole der Übertragungsfunktion

Mit zunehmendem Imaginärteil des Polpaars wächst die Frequenz des periodischen Einschwingvorgangs

1.2.2.2 Änderung des Realteils σ bei konstantem Imaginärteil ω

Nun soll untersucht werden, wie sich das System im Zeitbereich verhält, wenn die Schwingfrequenz, also der Imaginärteil ω festgehalten wird, während σ abnimmt, das Polpaar also in Richtung imaginäre Achse wandert. Nach unseren bisherigen Erkenntnissen sowie aus der Lösung der Differentialgleichung in 1.2.2.1 folgt, daß der Einschwingvorgang mit abnehmendem Abstand des Polpaares von der imaginären Achse immer länger dauert. Abb. 18 zeigt dieses Verhalten bei abnehmendem Abstand zur imaginären Achse bis zu dem Fall, daß beide Pole auf der imaginären Achse liegen.

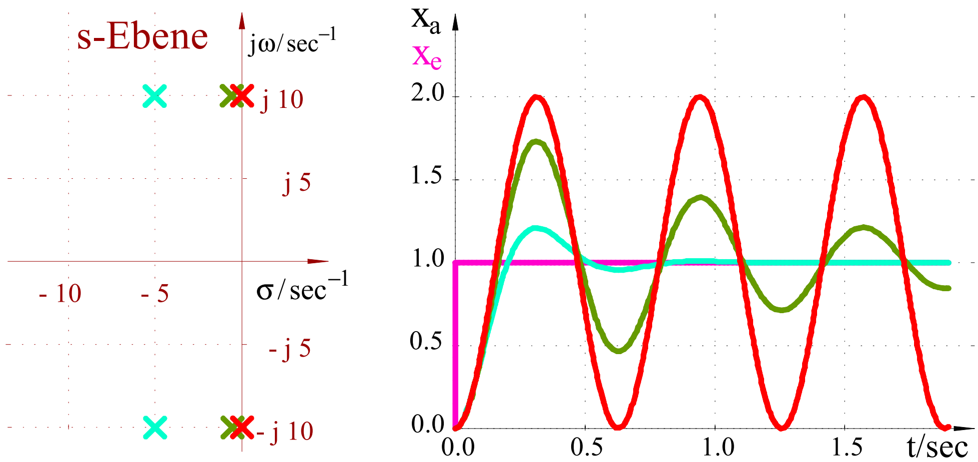


Abb. 18 Polpaar wandert bei konstanter Schwingkreisfrequenz ω in Richtung der imaginären Achse

Unveränderter Imaginärteil ω, abnehmender Realteil σ:

Schwingfrequenz des Einschwingvorgangs bleibt gleich, Dauer des Schwingvorgangs dauert immer länger bis hin zur ungedämpften Schwingung

Prof. Dr. J. Höcht
Prof. R. Göhl
Prof. Dr. W. Englberger

Diese Bewegung der Pole kann nicht mehr alleine durch die Verstärkung K_R des Reglers erreicht werden. Vielmehr sind hier auch Maßnahmen an der Strecke erforderlich, um dies zu zeigen. Die Erläuterung dieses einfachen Verfahren würde hier aber zu weit führen und ist erst Thema im Schwerpunkt "Automatisierungstechnik".

Polpaar in der rechten s-Halbebene

Abschließend lassen wir das konjugiert komplexe Polpaar in die rechte s-Halbebene wandern, verwenden also negative Werte für σ. Betrachtet man die Lösung der Differentialgleichung in Kap. 1.2.2.1, so sieht man, daß bei negativem σ die Exponentialfunktion über alle Schranken wächst. Da mit dieser Exponentialfunktion die in der Klammer stehende sinusförmige Funktion (Kreisfrequenz ω) gewichtet wird, ergibt das Zeitverhalten eine aufklingende Schwingung (Abb.19).

Aufklingende Schwingungen! Instabilität

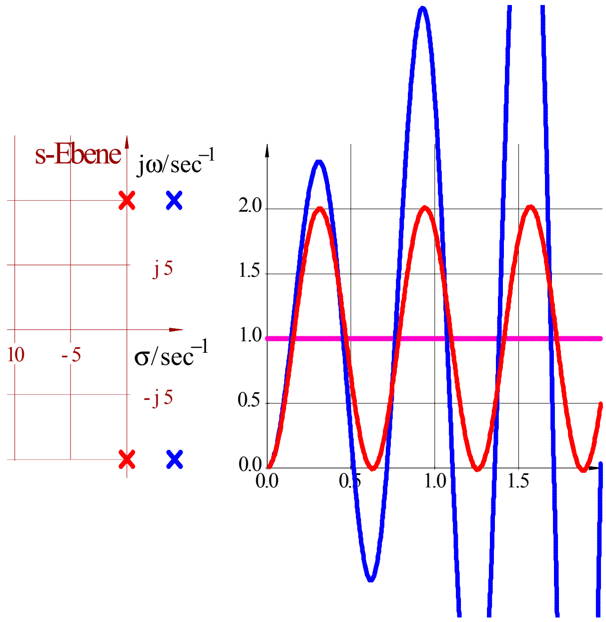


Abb. 19 Instabiles Verhalten bei einer Lage der Pole in der rechten s-Halbebene

Als Gesamtergebnis aller bisherigen Betrachtungen läßt sich festhalten:

- **Liegen Pole der Übertragungsfunktion in der rechten s-Halbebene, dann ist das dynamische System instabil.**

- **Polpaare auf der imaginären Achse führen zu ungedämpften Schwingungen.**

- **Ein Pol im Ursprung bewirkt Integral-Verhalten.**

- **Die Imaginärachse ist also damit die Stabilitätsgrenze. Nur Systeme, deren sämtliche Pole in der offenen linken s-Halbebene (also ohne Einschluß der imaginären Achse) liegen, sind stabil.**

2 Beurteilung der Stabilität eines dynamischen Systems

Beurteilung der Stabilität:

Algebraische und meßtechnische Verfahren

Die Beurteilung des Zeitverhaltens und der Stabilität eines linearen Systems ist sehr einfach, wenn man die Pole der Übertragungsfunktion kennt. Bedauerlicherweise tritt dieser Fall nur sehr selten ein. Häufiger kennt man die Übertragungsfunktion, muß aber die Pole erst berechnen. Dies ist bei Systemen höherer Ordnung durchaus mit einigem Rechenaufwand verbunden, der zwar heute nicht mehr diese Rolle spielt, wie noch vor nicht allzu langer Zeit, aber ein geringerer Aufwand zur Beurteilung der Stabilität ist trotzdem von Vorteil.
Der weitaus häufigste Fall aber ist, daß die Übertragungsfunktion G(s) nicht als Gleichung vorliegt, sondern das System nur meßtechnisch mit vertretbarem Aufwand erfaßt werden kann.

Im folgenden werden Sie daher zwei Klassen von Beurteilungsverfahren kennenlernen:

- algebraische Kriterien für eine analytisch bekannte Übertragungsfunktion
- meßtechnisch gestützte Verfahren mit Hilfe der Ortskurve des Frequenzgangs und des Bode-Diagramms

Im Rahmen der Grundvorlesung "Regelungstechnik" liegt das Hauptgewicht auf den algebraischen Verfahren. Die für die betrieblichen Praxis, z.B. bei der Inbetriebnahme von Werkzeugmaschinen relevanten meßtechnisch basierten Verfahren werden ausführlich im Studienschwerpunkt "Automatisierungstechnik" behandelt.

2.1 Algebraische Kriterien

2.1.1 Beurteilung des dynamischen Verhaltens eines Systems 2. Ordnung durch den Dämpfungsgrad D

Eine einfache Möglichkeit zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens existiert für Systeme 2. Ordnung mit dem Dämpfungsgrad D. Im folgenden wird der Zusammenhang zwischen unterschiedlichen Darstellungen der Charakteristischen Gleichung sowie zwischen der Größe von D und der Lage der Pole erläutert.

Die charakteristische Gleichung in der Form

$$s^2 \cdot T_2^2 + s \cdot T_1 + 1 = 0 \qquad (1)$$

Darstellung der Charakteristischen Gleichung durch ihre Nullstellen

habe die Lösungen s_1 und s_2. Stellt man die Charakteristische Gleichung mit Hilfe dieser Nullstellen in der Form

$$(s - s_1) \cdot (s - s_2) = 0 \qquad (2)$$

dar und bringt sie auf eine Form, bei der das konstante Glied ebenfalls 1 ist, so gelangt man zu

Prof. Dr. J. Höcht
Prof. R. Göhl
Prof. Dr. W. Englberger

$$s^2 \cdot \frac{1}{s_1 \cdot s_2} + s \cdot \frac{-(s_1 + s_2)}{s_1 \cdot s_2} + 1 = 0 \qquad (3)$$

Diese Gleichung kann man so umformen, daß beim linearen Glied der Quotient aus arithmetischem und geometrischem Mittel der Nullstellen steht.

$$s^2 \cdot \frac{1}{s_1 \cdot s_2} + s \cdot 2 \cdot \frac{-(s_1 + s_2)/2}{\sqrt{s_1 \cdot s_2} \cdot \sqrt{s_1 \cdot s_2}} + 1 = 0 \qquad (4)$$

Faßt man diesen Quotienten gemeinsam mit dem Minuszeichen zusammen und definiert ihn als Dämpfungsgrad D mit

Definition des Dämpfungsgrades D

$$D = -\frac{\text{arithmetisches Mittel der Nullstellen}}{\text{geometrisches Mittel der Nullstellen}} = -\frac{(s_1 + s_2)/2}{\sqrt{s_1 \cdot s_2}}, \qquad (5)$$

so erhält die Charakteristische Gleichung die Gestalt

Berechnung von D aus den Koeffizienten der Charakteristischen Gleichung:

$$s^2 \cdot \frac{1}{s_1 \cdot s_2} + s \cdot 2 \cdot D \cdot \frac{1}{\sqrt{s_1 \cdot s_2}} + 1 = 0 \qquad (6)$$

Ein Vergleich mit (1) führt zur Berechnungsvorschrift für den Dämpfungsgrad D aus der Darstellung mit den Koeffizienten T_1 und T_2^2:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{\sqrt{T_2^2}} \qquad (7)$$

Nun ist vor allem interessant, welchen Zahlenwert der Dämpfungsgrad D für ein bestimmtes dynamisches Verhalten annimmt, wie aperiodisch kriechend, gedämpft schwingend usw. Dazu betrachten wir die Lage der Nullstellen in der komplexen s-Ebene und ermitteln mit der Definition von D in (5) den zugehörigen Dämpfungsgrad.

Zwei reelle Pole s_1 und s_2 in der linken s-Halbebene führen zu **D > 1**, da der arithmetische Mittelwert größer als der geometrische Mittelwert ist. Das dynamische Verhalten ist **aperiodisch kriechend**.

D > 1: **aper. kriechend**

Zwei reelle Pole an derselben Stelle $-\sigma_0$ der negativ reellen Achse führen zu **D = 1** und entsprechen dem schnellstmöglichen aperiodischen Einschwingen auf einen stationären Wert, also dem **aperiodischen Grenzfall**.

D = 1: **aperiod. Grenzfall**

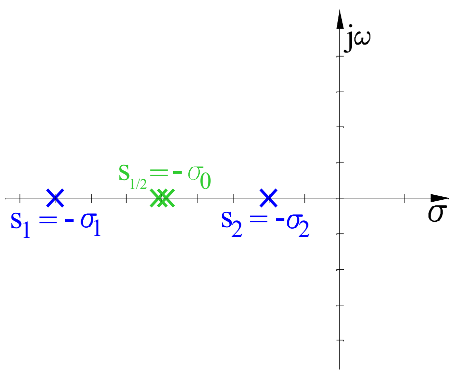


Abb. 20 Rein reelles Polpaar

Wandern die beiden Pole zu einem konjugiert komplexen Polpaar in die s-Ebene mit $Re\{s_{1/2}\} = -\sigma_o$ und $Im\{s_{1/2} = \pm j\omega_0)$ auseinander, so liegt **D zwischen 0 und 1**: Der geometrische Mittelwert $\sqrt{s_1 \cdot s_2}$ der beiden Pole ist gerade der Betrag des jeweiligen Pols $|s_1| = |s_2| = \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_o^2}$ während der negative arithmetische Mittelwert zu $-(s_1 + s_2)/2 = \sigma_o$ führt. Das Zeitverhalten für diese Polkonfiguration ist **periodisch gedämpftes Verhalten**. Auf einen Sprung schwingt dieses System ein mit der Frequenz ω_o, wobei die Schwingung mit $e^{-\sigma_0 \cdot t}$ abklingt.

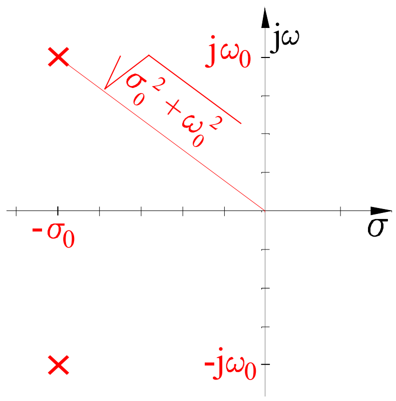


Abb. 21 Konjugiert komplexes Polpaar

0 < D < 1: Periodisch gedämpfte Schwingung

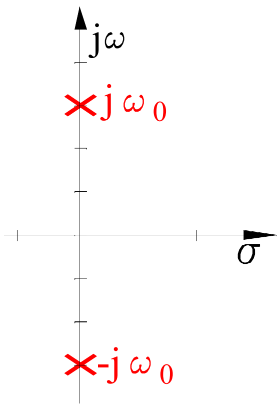


Abb. 22 Rein imaginäres Polpaar

Je näher ein Polpaar an der imaginären Achse liegt, desto langsamer klingt also die Schwingung ab, bis schließlich auf der imaginären Achse eine **ungedämpfte** Schwingung vorliegt. In diesem Fall ist der arithmetische Mittelwert der Pole gleich Null, so daß **D = 0** gilt.

D = 0: Periodisch ungedämpfte Schwingung, Stabilitätsgrenze

D < 0 oder D komplex: Instabiles Verhalten, aufklingende Schwingungen oder exponentieller Anstieg

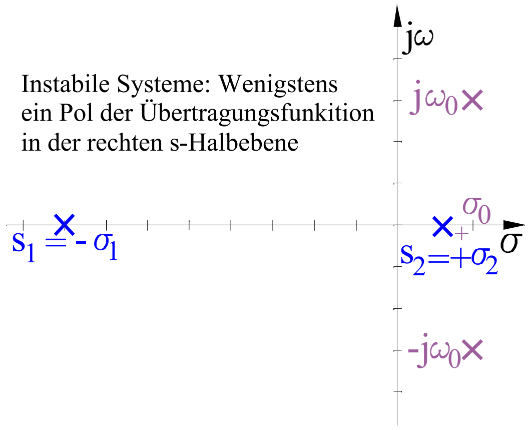


Abb. 23 Ein oder zwei Pole in der rechten s-Halbene

Wird **D schließlich negativ oder rein imaginär**, so liegen Pole in der rechten s-Halbebene, also mit positivem Realteil σ_o. Ein derartiges System ist **instabil**. In diesem Fall tritt nämlich eine Funktion in der Form $e^{+\sigma_0 \cdot t}$ auf, die für $t \to \infty$ über alle Schranken wächst.

Zusammenfassung	
D > 1	aperiodisches Kriechen
D = 1	aperiodischer Grenzfall
1 > D > 0	periodisch gedämpftes Einschwingen
D = 0	ungedämpfte Schwingung
D imaginär oder negativ	instabil

WICHTIG!

DIESE TABELLE MÜSSEN SIE JEDERZEIT AUSWENDIG PARAT HABEN

2.1.2 Beurteilung der Stabilität aus den Koeffizienten des Nenners der Übertragungsfunktion G(s)

Um die Stabilität eines dynamischen Systems anhand der Pole der Übertragungsfunktion nachzuweisen, ist es nicht nötig, die Lage der Pole zu berechnen. Vielmehr kann man bereits den Koeffizienten des Nennerpolynoms von G(s) entnehmen, ob alle Pole in der linken s-Halbebene liegen.

Generell gilt folgende Aussage:

Algebraisches Kriterium für Instabilität

Ein System ist sicher dann instabil, wenn wenigstens einer der Koeffizienten des Charakteristischen Polynoms gleich Null ist oder ein anderes Vorzeichen als die restlichen Koeffizienten aufweist.

Leider gilt die Umkehrung des Satzes nicht, d. h., auch wenn alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, i.a. also positiv sind, kann immer noch eine Nullstelle des Polynoms in der rechten s-Halbebene liegen.

Zur Beurteilung, ob die Nullstellen in diesem Fall wirklich links der imaginären Achse liegen, haben Hurwitz und Routh im 19. Jahrhundert Rechenverfahren angegeben.

2.1.2.1 Verfahren von Hurwitz

Hurwitztest für Stabilität

Das Nennerpolynom hat die Form $a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0$.
Häufig ist $a_0 = 1$. Statt dessen kann auch $a_n = 1$ sein.
Aus diesen Koeffizienten wird eine n x n - Matrix gebildet mit folgendem Aufbau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
D_1 & D_2 & D_3 & \ldots & D_{n-1} & D_n & \\
\end{array}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & . & . & . & . \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & . & . & . & . \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & . & . & . \\
0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & . & . & . \\
0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & . & . \\
0 & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & . & . \\
0 & 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}\right|
$$

Dabei werden Koeffizienten, deren Index negativ oder größer als n ist, mit Null in die Matrix eingefügt.

Hurwitzdeterminante aus dem Charakteristischen Polynom

Aus dieser Matrix werden nun alle Hauptabschnittsdeterminanten D_1, D_2, ... , D_{n-1}, D_n gebildet. Dabei versteht man unter den Hauptabschnittsdeterminanten folgende Unterdeterminanten:

$$D_1 = a_{n-1}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}. \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

u.s.w.

Hauptabschnittsdeterminanten der Hurwitzmatrix

Daraus ergibt sich als Kriterium für die Stabilität des dynamischen Systems:

Sind alle Koeffizienten und alle Hauptabschnittsdeterminanten positiv, dann liegen alle Nullstellen des Nennerpolynoms in der offenen linken s-Halbebene und das System ist stabil.

Stablitätskriterium nach Hurwitz

Aus dem Hurwitz-Kriterium ergeben sich für Polynome bis zum Grad 4 folgende Bedingungen:

Hurwitzkriterium bis zu einem System 4. Ordnung

n = 1: $a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

n = 2: $a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

n = 3: $a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

$$\left(a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3 \right) > 0$$

n = 4: $a_4 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

$$\left(a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3^2 - a_1^2 \cdot a_4 \right) > 0$$

2.1.2.2 Verfahren von Routh

Beurteilung der Stabilität nach Routh

Bei der Berechnung der Hauptabschnittsdeterminanten des Hurwitz-Tests müssen Determinanten höherer Ordnung durch einen geeigneten Algorithmus (Heaviside´scher Entwicklungssatz) auf Summen von Determinanten 2. Ordnung zurückgeführt werden. Dies entfällt beim Verfahren von Routh, bei dem dieser Algorithmus bereits implizit enthalten ist, so daß nur zweireihige Determinanten zu berechnen sind.

Ausgangspunkt ist wieder das Charakteristische Polynom, also der Nenner der Übertragungsfunktion G(s), in der Form

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0.$$

Aus den Koeffizienten dieses Polynoms werden die ersten beiden der n+1 Zeilen des Routh-Schemas gebildet. Beide Zeilen haben eine Spalte mehr, als die ganzzahlige Division n DIV 2 angibt, z.B. bei einem Polynom 5. Grades ergeben sich (5 DIV 2) + 1 = 2 + 1 = 3 Spalten.

Hat der letzte Koeffizient der zweiten Zeile den Index -1, so wird für diesen Koeffizienten a_{-1} der Wert 0 eingesetzt. (Dieser Fall kommt bei Polynomen geradzahliger Ordnung vor).

Bildung der ersten beiden Zeilen des Routh-Schemas

$$
\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & & & \\
s^2 & p_1 & p_2 & & & \\
s^1 & q_1 & & & & \\
s^0 & r_1 & & & &
\end{array}
$$

Die Elemente der nachfolgenden Zeilen werden jeweils als zweireihige Determinanten aus den beiden darüberliegenden Zeilen berechnet. Dabei verringert sich die Zahl der Elemente pro Zeile um eins.

Die Determinanten werden jeweils aus den beiden Elementen der ersten Spalte und der Spalte rechts vom zu berechnenden Element gebildet:

Berechnung der Elemente ab der dritten Zeile

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \qquad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad c_2 = -\frac{1}{b_1} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \dots$$

Haben alle Koeffizienten in der ersten Spalte des Routh-Schemas das gleiche Vorzeichen, dann liegen alle Nullstellen des Charakteristischen Polynoms in der offenen linken s-Halbebene.

Stabilitätskriterium nach Routh

2.2 Meßtechnisch gestützte Beurteilung der Stabilität eines *geschlossenen* Regelkreises aus dem Frequenzverhalten des *aufgeschnittenen K*reises

Bei den algebraischen Stabilitätskriterien nach Hurwitz und Routh muß die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises bekannt sein. Dies ist bei Regelkreisen, wie sie in der Praxis vorkommen, nicht immer der Fall. Viel leichter dagegen kann man häufig den Frequenzgang der Hintereinanderschaltung aus Regler und Strecke, den "aufgeschnittenen Regelkreis", messen.

Prof. Dr. J. Höcht
Prof. R. Göhl
Prof. Dr. W. Englberger

In dieser Anordnung legt man an den Führungsgrößeneingang w ein Signalgemisch, das alle Frequenzen enthält, ein sogenanntes "weißes Rauschen". Das am Streckenausgang ankommende Regelgrößensignal x(t) kann man mit einem Frequenzanalysator (Spectrum-Analyzer) bezüglich der Amplitude und Phasenlage der einzelnen Frequenzanteile vermessen, mit dem Eingangssignal vergleichen und damit den Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises $G_0(j\omega) = G_R(j\omega) \bullet G_S(j\omega)$ auf dem Bildschirm oder einem Plotter aufzeichnen. Diese Möglichkeit ist bei modernen Antriebssteuerungen, wie etwa der Sinumerik 840D, standardmäßig für die Inbetriebnahme als Werkzeug enthalten.

Meßtechnische Ermittlung des Frequenzgangs mit Hilfe eines weißen Rauschsignals

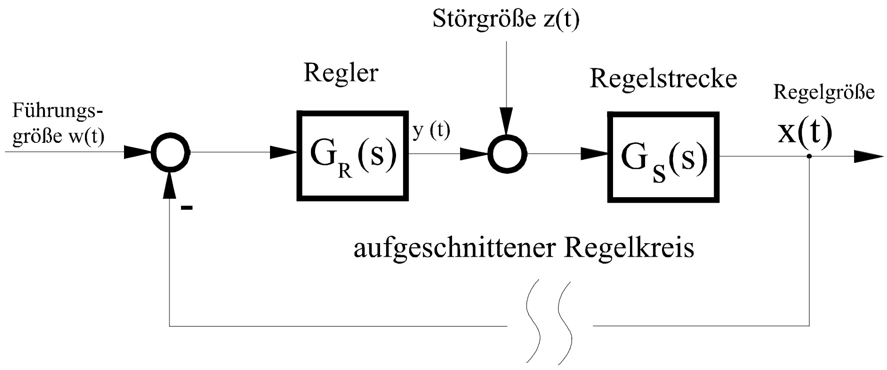


Abb. 24 Aufgeschnittener Regelkreis - Ermittlung des Frequenzgangs

Weißes Rauschen stellen Frequenzanalysatoren in der Regel als Signalquelle zur Verfügung. Aus dem Verlauf der Frequenzkennlinien des aufgeschnittenen Regelkreises kann man auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises schließen. Untersuchungen des Frequenzgangs $G_0(j\omega) = G_R(j\omega) \bullet G_S(j\omega)$ liefern dabei nicht nur eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises, sondern darüber hinaus auch noch wichtige Informationen über das dynamische Verhalten.

Wegen dieser universellen Einsatzmöglichkeit und der einfachen Anwendung haben die auf den Frequenzkennlinien basierenden Verfahren weite Verbreitung bei der Anwendung in der Praxis gefunden. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich aber nur auf die Beurteilung der Stabilität.

2.2.1 Ortskurve des Frequenzgangs und Stabilitätskriterium von Nyquist

Hier sollen nur einfache Regelkreisglieder betrachtet werden, deren Hintereinanderschaltung auf Systeme führt, die stabil sind oder zusätzlich höchstens zwei I-Glieder beinhalten.

Ortkurve des Frequenzgangs und Stabilitätskriterium von Nyquist

Geschlossener Regelkreis

Das Strukturbild des geschlossenen Regelkreises zeigt Abb.25:

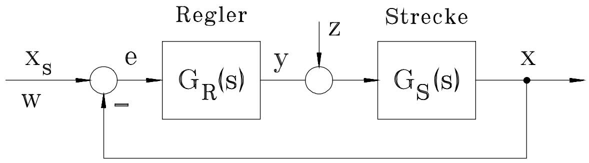


Abb. 25 Blockschaltbild zur Untersuchung des Führungs- und des Störverhaltens

Die Übertragungsfunktionen zur Untersuchung des Stör- und des Führungsverhaltens unterscheiden sich nur durch den Term im Zähler:

Übertragungsfunktionen für die Untersuchung des Führungs- und des Störverhaltens

Übertragungsfunktion

Führungsverhalten

$$G_w(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_R \cdot G_S}{1+G_R \cdot G_S}$$

Störverhalten

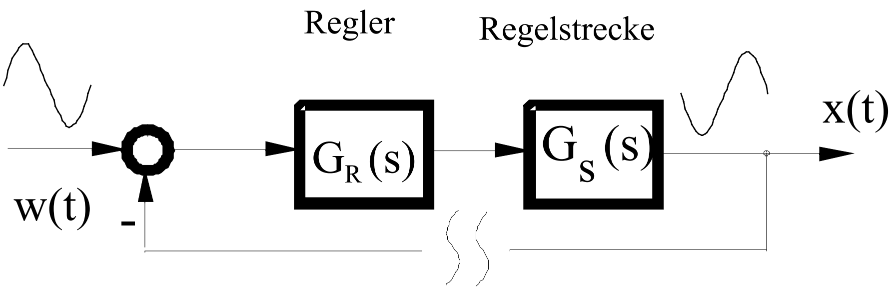
$$G_z(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{G_S}{1+G_R \cdot G_S}$$

In beiden Fällen lautet das Nennerpolynom $N(s)=1+G_R \cdot G_S$. Das Produkt $G_R \cdot G_S$ ist die oben erwähnte Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises, die für s = jω zu dessen Frequenzgang wird.

Falls für eine bestimmte Frequenz ω_0 der Ausdruck $G_R \cdot G_S = -1$ wird, verschwindet der Nenner des geschlossenen Regelkreises - der Frequenzgang wird unendlich. Das bedeutet, daß ohne Eingangssignal w ein endliches Ausgangssignal x vorhanden ist, nämlich eine periodische, ungedämpfte Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0. Aus der Gegenkopplung ist bei dieser Frequenz also eine Mitkopplung geworden:

Die ungedämpfte Schwingung wird auch anschaulich klar, wenn man folgendes bedenkt:

Nehmen wir zunächst an, der Regelkreis sei im Rückführzweig aufgeschnitten und am Eingang w liege ein sinusförmiges Signal mit dieser Kreisfrequenz ω_0 an.



Ortkurve des Frequenzgangs und Stabilitätskriterium von Nyquist

Abb. 26 Zur Erläuterung des Nyquistkriteriums

Die Sinusschwingung des Ausgangs x ist gegenüber dem Signal e am Eingang des Reglers um 180° phasenverschoben und hat die gleiche Amplitude.

Mitkopplung durch Phasenverschiebung um 180°

Ungedämpfte Schwingung bei Eingangssignal w = 0

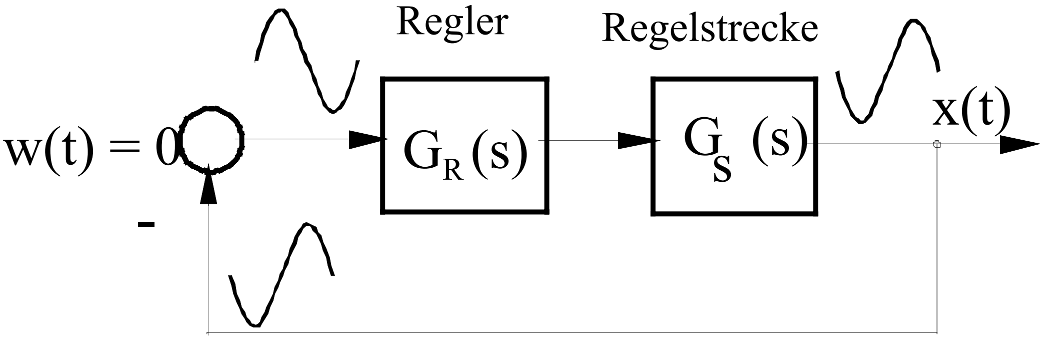


Abb. 27 Mitkopplung durch Phasenverschiebung um 180°

Wird nun dieses phasenverschobene Signal mit negativem Vorzeichen an die Summationsstelle von Regelgröße x und Führungsgröße w geleitet, so kann man die Führungsgröße zu Null machen, da dieses Signal völlig ersetzt wird durch x. Der Regelkreis schwingt ungedämpft bei dieser Frequenz.

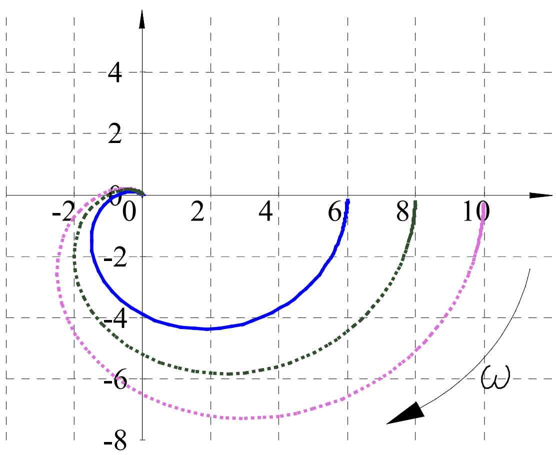
Ist aber der Betrag des Produkts $\left|G_R \cdot G_S\right| > 1$ bei gleicher Phasenverschiebung um 180°, so ist das Eingangssignal sogar größer, als es zur Aufrechterhaltung der ungedämpften Schwingung nötig wäre: Die Regelgröße x wächst über alle Schranken - das System ist instabil.

Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu beurteilen, muß also der Frequenzgang $G_0 = G_R \cdot G_S$ aufgezeichnet werden. Beim folgenden Beispiel der Regelung einer PT_3-Strecke mit einem P-Regler mit der

Streckenübertragungsfunktion $G(s)=\dfrac{1}{(s \cdot T+1)^3}$ (T = 1 min) ist $G_0(j\omega)$ für die

drei Reglerverstärkungen $K_{R1} = 6$, $K_{R2} = 8$ und $K_{R3} = 10$ aufgetragen. Im rechten Diagramm ist der Bereich in der Nähe von -1 vergrößert dargestellt.

Verlauf der Ortskurve des *offenen* Regelkreises bei -1



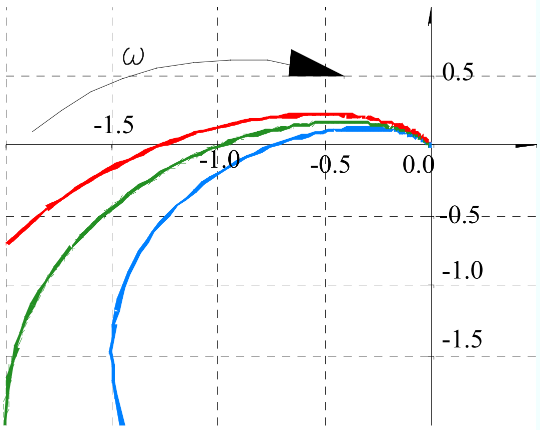


Abb. 29 Ortskurve des Frequenzgangs für wachsende Kreisverstärkung

Abb. 28 Vergrößerung des Bereichs um -1

Für wachsende Kreisfrequenzen ω läßt die Ortskurve des **aufgeschnittenen Regelkreises** für K_R = 6 den Punkt -1 links liegen. Im Falle von K_R = 8 geht die Ortskurve durch den Punkt -1 auf der reellen Achse und für K_R = 10 liegt dieser Punkt rechts von der Ortskurve.

Ungedämpfte Schwingung des *geschlossenen* Regelkreises , wenn die Ortskurve des *offenen* Regelkreises den Punkt -1 schneidet

Die Impulsantworten des **geschlossenen Regelkreises** für die drei Reglerverstärkungen zeigt das folgende Diagramm:

Verhalten des Systems beim geschlossenen Regelkreis

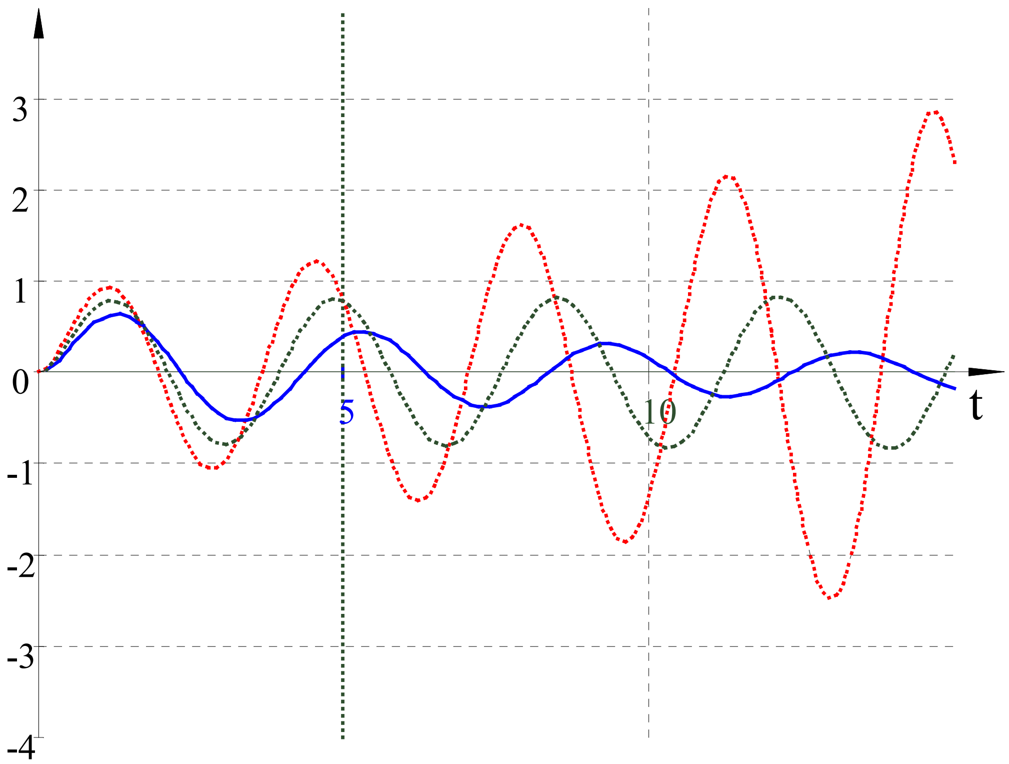


Abb. 30 Verhalten des geschlossenen Regelkreises für die drei Kreisverstärkungen

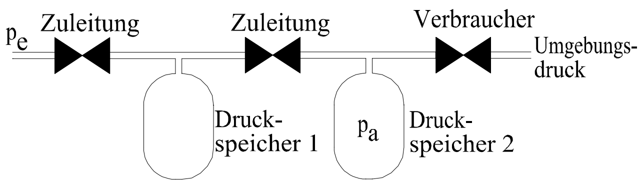
2.2.2 Bodediagramm

Die Beurteilung der Stabilität und die Optimierung des dynamischen Verhaltens einer Anlage (z.B. einer Werkzeugmaschine) mit Hilfe des Bodediagramms ist das wohl wichtigste Hilfsmittel für die Praxis. Aufgrund der stark begrenzten Zeit für das Fach Regelungs- und Steuerungstechnik muß dieses Thema leider ausgeklammert werden. Es wird aber sehr ausführlich im Studienschwerpunkt "Automatisierungstechnik" behandelt und setzt die in der Grundvorlesung "Regelungs- und Steuerungstechnik" erworbenen Denkweisen und Fertigkeiten für das Verständnis voraus.

3 Aufgaben zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens und der Stabilität

3.1 Druckregelung in einem verfahrenstechnischen Prozeß

Zwei über Rohrleitungen miteinander verbundene Druckspeicher sollen den Druckverlauf für einen Verbraucher glätten, auch wenn größere Schwankungen in der Druckversorgung p_e auftreten. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schema dieser Anlage. Die Übertragungsfunktion dieser Strecke hat die Form



$$G_S(s) = \frac{P_a(s)}{P_e(s)} = \frac{0.81}{16.00\,\mathrm{min}^2 \cdot s^2 + 19.72\,\mathrm{min} \cdot s + 1}.$$

3.1.1 Ist dieses System für sich allein periodisch schwingungsfähig? Begründen Sie Ihre Antwort!

3.1.2 Die Entnahme von Druckluft durch den Verbraucher wirkt als Störung z(t). Zur Konstanthaltung des Drucks p_a im 2. Kessel wird ein P-Regler mit der einstellbaren Verstärkung K_R vorgesehen. Das dynamische Verhalten beschreibt folgende Übertragungsfunktion:

$$G_z(s) = \frac{P_a(s)}{Z(s)} = \frac{0.81}{16.00\,\mathrm{min}^2 \cdot s^2 + 19.72\,\mathrm{min} \cdot s + 1 + 0.81 \cdot K_R}$$

Um die stationäre Abweichung bei einer hundertprozentigen Verbraucherstörung bei 2% zu halten wird eine Verstärkung von $K_R = 48.7$ eingestellt. Beurteilen Sie mit Hilfe des Dämpfungsgrades D das Schwingungsverhalten (aperiodisch kriechend, aperiodischer Grenzfall usw.)

3.1.3 Begründen Sie, ob dieses System instabil werden kann, wenn man eine andere Verstärkung K_R einstellt.

3.1.4 Verbesserung des dynamischen Verhaltens

3.1.4.1 Welchen Reglertyp schlagen Sie vor, wenn das bisherige **stationäre** Verhalten mit seiner Abweichung von 2% bei einem Sprung des Verbrauchers auf Vollast **beibehalten,** das dynamische jedoch verbessert werden soll? Geben Sie auch dessen Differentialgleichung und die Übertragungsfunktion an.

Reglertyp:

Differentialgleichung :

Übertragungsfunktion:

3.1.4.2 Berechnen Sie den betreffenden Reglerparameter für die beiden Fälle, daß

- der Dämpfungsgrad D = 0.8 beträgt
- der Druck p_a nach einem Sprung der Störgröße z gerade aperiodisch auf den stationären Endwert einschwingt.

3.2 Beurteilung der Stabilität dynamischer Systeme

Welche der unten angegebenen Systeme sind stabil und welche sind instabil? Unterstreichen Sie die zutreffende Eigenschaft und **begründen Sie Ihre Entscheidung!**

System 1:	$5 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 3 \cdot x_e(t)$	stabil	instabil
System 2:	$G_W(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6 \cdot s + 18}$	stabil	instabil
System 3:	$\ddot{x}(t) + 16 \cdot x(t) = K \cdot z(t)$	stabil	instabil
System 4:	$G_Z(s) = \dfrac{3}{8 \cdot s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}$	stabil	instabil

Begründungen:

3.3 System dritter Ordnung - dynamisches Verhalten

Gegeben sei folgendes System 3. Ordnung (Störübertragungsfunktion der Temperaturregelung eines Rührkessel-Reaktors):

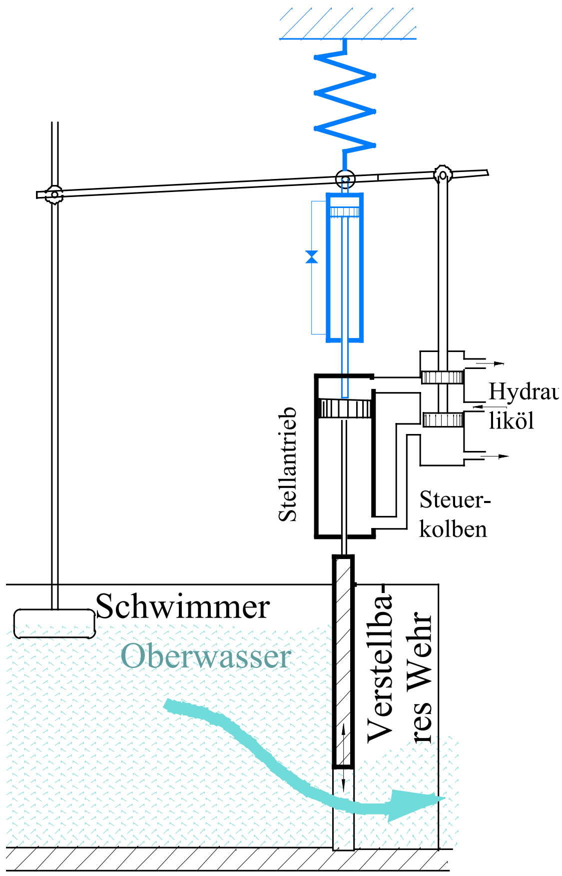
$$G_Z(s) = \frac{32 \cdot T_{IR} \cdot s^2 + 8 \cdot s}{T_{IR} \cdot 100\,\mathrm{sec}^2 \cdot s^3 + T_{IR} \cdot 25\,\mathrm{sec} \cdot s^2 + 10 \cdot K_P \cdot T_{IR} \cdot s + 5}$$

T_{IR} und K_P sind die Parameter des verwendeten PIT_0-Reglers. In der obigen Funktion treten neben den Zahlenwerten keine Einheiten auf, da die Werte normiert sind.

Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Reglerparametern T_{IR} und K_P so, daß der Regelkreis nach einer sprungförmigen Anregung (periodisch oder aperiodisch) abklingend auf den Beharrungswert einschwingt.

3.4 Regelung des Wasserstandes an einem Flußkraftwerk

Der Wasserstand des Oberwassers an einem Flußkraftwerk wird mit der nebenstehenden Anordnung geregelt:
Die Strecke selbst besitzt IT_0-Verhalten. Der Regler, bestehend aus Stellmotor (= I-Verhalten) und interner nachgebender Rückführung (DT_1-Glied) stellt insgesamt einen PI-Regler dar. Als Führungsübertragungsfunktion ergibt sich für den gesamten Regelkreis:



$$G_w(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{T_D \cdot s + 1}{T_S \cdot T_R \cdot T_D \cdot s^3 + T_S \cdot (T_R + T_D) \cdot s^2 + T_D \cdot s + 1}$$

Ist der Regelkreis für positive Parameter T_S (Strecke), T_R und T_D (Regler) stabil?
Welchen Einfluß haben T_S und T_R auf die Stabilität und warum?

Rückmeldung zum Lerntext "Zeitverhalten und Stabilität linearer dynamischer Systeme" SS 2004

Sehr geehrte Studentinnen und Studenten,

bitte helfen sie uns, diesen Text weiter zu verbessern und neue Texte von vornherein noch besser verständlich für Sie zu gestalten. Um Ihnen die Formulierung zu erleichtern sind einige Sätze angefangen, die Sie mit Ihren eigenen Gedanken ergänzen können. Sie müssen diese angefangenen Sätze aber nicht unbedingt verwenden, wenn Sie lieber völlig frei Ihre Gedanken, in welcher Form auch immer (z.B. Stichpunkte), niederlegen wollen.

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!

J. Höcht

Bei diesem Lerntext hat mir besonders gefallen ...

Besser verstanden hätte ich, wenn ...

Weiter möchte ich anregen ....