

Digitale Verarbeitung von Sensorsignalen

J. Höcht

7.3.2006 - ...

Stand: 30.06.2008

Inhaltsverzeichnis

	Vorbemerkungen	5
1	Signale im Regelkreis	7
1.1	Beseitigung von Störungen im Sensorsignal durch Filterung	8
1.2	Analoge und digitale Filterung - Gemeinsamkeiten und Unterschiede	9
1.2.1	Beschreibung des analogen Tiefpasses 1. Ordnung im Frequenzbereich	9
1.2.2	Näherung der Differentialgleichung des analogen Tiefpasses durch eine Differenzgleichung	12
1.2.3	Blockschaltbild der Differenzgleichung	12
1.2.4	Frequenzgang des digitalen Tiefpasses	13
1.2.4.1	Herleitung der Übertragungsfunktion durch Anregung der Differenzgleichung mit einem sinusförmigen Signal	13
1.2.4.2	Blockschaltbild analoger und digitaler Systeme – Zusammenhang mit Laplace- und z-Transformation	15
1.2.4.3	Frequenzgang eines analogen und eines digitalen Tiefpasses	17
1.2.4.4	Einfluß der Länge des Abtastintervalles $\Delta\tau$ auf den Amplitudengang	19
1.2.4.5	Verschiebung der Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses gegenüber dem analogen Filter	19
1.2.4.6	Phasengang des digitalen Tiefpasses	20
1.2.5	Zeitkontinuierliche Sinussignale zwischen Abtastung und analoger Ausgabe	21
1.2.5.1	Sinusförmiges Eingangssignal bei der halben Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses	22
1.2.5.2	Reaktion des digitalen Tiefpasses auf ein Signal in der Nähe der Abtastfrequenz	23
1.3	Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse	25
2	Analoge und digitale Signale	26
2.1	Lineare Systeme im Zeitbereich	26
2.2	Impulsantwort eines Tiefpasses 1. Ordnung und Normimpuls $\delta(t)$	27
2.3	Delta-Distribution und Normimpuls	30
2.3.1	Sprungsignal und δ -Distribution	33
2.3.2	δ -Distributionen und erzeugende Funktionen	35
2.4	Der Faltungssatz für kontinuierliche Systeme	35
2.4.1	Darstellung eines beliebigen Eingangssignals $u(t)$ als Summe von Impulsen	35
2.4.2	Reaktion des Systems auf die Summe der Impulse - Faltungssatz für analoge Systeme	36
2.4.3	Laplace- und Fouriertransformierte des Ausgangssignals $x(t)$	37
2.5	Faltungssatz für digitale Signale	41
2.6	Digitale Filter auf der Basis des Faltungssatzes	43
2.6.1	Eins-Impulsantwort des FIR-Tiefpasses mit Grenzfrequenz 0.2Hz	44

2.6.2	Filterung einer Sinusschwingung bei der halben Tiefpaß-Grenzfrequenz	47
2.7	Rekursive und nichtrekursive Digitalfilter – Gegenüberstellung	48
3	Fourieranalyse und Fouriertransformation	49
3.1	Fourieranalyse einer periodischen Zeitfunktion $x(t)$	50
3.2	Von den Fourierkoeffizienten zur Fouriertransformation	54
3.2.1	Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation und Anwendung auf diskrete Systeme	58
3.2.1.1	Spektrum des Normimpulses und der δ -Distribution	58
3.2.1.2	Spektrum eines Gleichsignals	59
3.2.1.3	Zeitliche Verschiebung einer Zeitfunktion um t_{abt}	60
3.2.1.4	Verschiebung eines Frequenzspektrums um f_0	62
3.2.2	Zusammenfassende Beispiele	63
3.2.2.1	Verschiebung von $\delta(t)$ um die Zeit t_{abt} .	63
3.2.2.2	Verschiebung des Spektrums des Gleichsignals um f_0	64
3.2.2.3	Summe zweier um $\pm f_0$ verschobener $\delta(f)$ -Distributionen	64
3.2.3	Wichtige Zeitfunktionen und ihre Fouriertransformierten	65
3.3	Abtastung kontinuierlicher Signale	68
3.3.1	Modellierung der Umwandlung eines kontinuierlichen Signals in eine Treppenfunktion	68
3.3.1.1	Spektrum einer $\delta(t)$ -Impulsfolge	69
3.3.1.2	Spektrum eines Eins-Impulses der Dauer t_{abt}	69
3.3.2	Spektrum $X_T(f)$ der Treppenfunktion $x_T(t)$	70
3.3.3	Mathematische Darstellung der Abtastung	71
3.4	Spektrum abgetasteter Signale – Shannon'sches Abtasttheorem	73
3.4.1	Spektrum zweier multiplizierter Zeitfunktionen	74
3.4.2	Spektrum einer δ -Impulsreihe	76
3.4.3	Faltung einer Funktion $u(x)$ mit einer δ -Distribution	77
3.4.4	Multiplikation von $u(t)$ mit der $\delta(t)$ -Abtastimpulsreihe	79
3.4.5	Wiedergewinnung des ursprünglichen Zeitsignals aus dem periodischen Spektrum des abgetasteten Signals	81
3.4.6	Das Shannon'sche Abtasttheorem	82
3.4.7	Praktische Aspekte der Rückgewinnung des analogen Signals	83
	Literatur	87

Vorbemerkungen

Digitale Systeme ersetzen zunehmend die klassische Analogtechnik. Dies ist auch in der Regelungstechnik nicht anders. Die Vorteile der Digitaltechnik sind überzeugend: Systemgrößen verändern sich nicht mit der Zeit und aufgrund äußerer Einflüsse. Änderungen von Parametern erfolgen durch einfache Änderung eines Speicherinhalts, ja sogar Strukturänderungen im Regelkreis, etwa der Einbau eines bislang nicht vorhandenen Integralanteils im Regler oder eine gezielten Signalaufbereitung durch Frequenzfilter läßt sich ohne aufwendige Änderung der Hardware erreichen, indem ein neues Programm in den Speicher des Prozeßrechners eingespielt wird.

Die Nachteile der digitalen Verfahren, insbesondere die Periodizität der Algorithmen bezüglich Frequenz der verarbeiteten Signale, muß man aber kennen und berücksichtigen, um nicht von Fehlfunktionen überrascht zu werden.

Diese Eigenheiten digitaler Signalverarbeitungen beurteilen zu lernen ist Ziel des vorliegenden Lerntextes. Er soll helfen, den ersten (und schwersten) Schritt in das Gebiet der digitalen Signalverarbeitung zu machen, so daß ein selbständiges Weiterlernen anhand der vielfältigen einschlägigen Literatur einfach wird.

In unserer analog erlebten Welt lernt man zunächst die analoge Regelungstechnik mit ihren Methoden wie Laplace- und Fouriertransformation, den Frequenzkennlinienverfahren Ortskurve des Frequenzgangs und Bode-Diagramm kennen. Der selbstverständliche Umgang mit diesen Werkzeugen ist Voraussetzung dafür, diesen Lerntext erfolgreich durchzuarbeiten.

Um einen ersten Eindruck von der Arbeitsweise digitaler Filter zu gewinnen wird zunächst ein allen bestens bekanntes PT_1 -Glied betrachtet, das, vom Standpunkt der Signalverarbeitung aus gesehen, ein Tiefpaßfilter darstellt. Zur Festigung von Bekanntem und Erweiterung der Betrachtung wird die Entstehung des wichtigen Werkzeugs Bode-Diagramm und der Zusammenhang mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ veranschaulicht. Begriffe wie Amplitudengang und Grenzfrequenz sowie das Frequenzverhalten eines analogen Systems werden spätestens in diesem Abschnitt zur Selbstverständlichkeit.

Anschließend wird in der Differentialgleichung des analogen Tiefpasses der Differentialquotient durch den Differenzenquotienten mit dem endlichen Zeitintervall $\Delta\tau$ ersetzt und daraus ein einfacher rekursiver Algorithmus für einen digitalen Tiefpaß entwickelt. Zur Vertiefung des Verständnisses für digitale Systeme erfolgt die Untersuchung des Verhaltens im Frequenzbereich über den Zeitbereich durch Aufschaltung einer sinusförmigen Anregung und Untersuchung des Filter-Ausgangssignals. Dabei stellt sich heraus, daß ein Digitalfilter im Gegensatz zum Analogfilter einen periodisch wiederkehrenden Frequenzgang aufweist und nur für Frequenzen, die unterhalb der halben Abtastfrequenz $1/(2 \cdot \Delta\tau)$ liegen, einigermaßen mit dem Analogfilter übereinstimmt.

Da das digitalisierte Signal, das nur aus einer Treppenfolge besteht, die analoge Welt der Aktoren ansteuert, muß daraus auch wieder das „glatte“ analoge Signal zurückgewonnen werden.

Nach diesem vereinfachten Einstieg in die Denkart digitaler Systeme, speziell rekursiver Systeme, wird aufbauend auf die Kenntnisse analoger Systeme im Zeitbereich das wichtige (und leider eher selten anschaulich verstandene) Faltungsintegral hergeleitet und als Grundlage für eine weitere Klasse von Filtern eingesetzt, die im Gegensatz zu den rekursiven Filtern eine Impulsantwort endlicher Dauer besitzen. Während die rekursiven Filter daher auch den Zusatz IIR (Infinite Impulse Response) haben, spricht man bei den nun behandelten Systemen von FIR-Filtern (Finite Impulse Response).

Mit dieser Hinführung zu den IIR- und FIR-Filtern ist ein Grad der Vertrautheit mit solchen Systemen erreicht, der es erlaubt, durch systematisches Vorgehen auch die Unterschiede im Detail verstehen zu können.

Die Tatsache, daß beim Digitalfilter die halbe Abtastfrequenz die gleiche Bedeutung hat, wie beim Analogfilter Frequenzen gegen Unendlich, legt die Vorstellung nahe, daß nicht nur der unendlich ferne Frequenzpunkt auf die endliche Frequenz $1/2\Delta\tau$ abgebildet, sondern die ganze „analoge Frequenzachse“ beim Übergang zu digitalen Systemen gestaucht wird. Dies hat zur Folge, daß z.B. die Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses zu niedrigeren Frequenzen hin gewandert ist. Eine zur Darstellung analoger System mit Bodediagramm sehr ähnliche Beschreibung digitaler Systeme, die vertrauter erscheint als die bei digitalen Systemen übliche z-Transformation, liefert Dimensionierungsvorschriften, die es erlauben, analoge Filter in dazu äquivalente Filter umzuwandeln.

Abschließend wird eines der wichtigsten Werkzeuge der Dynamik, die Fouriertransformation, anschaulich hergeleitet und im Zusammenhang mit digitalen Systemen die diskreten Fouriertransformation DFT daraus entwickelt. Falls die Anzahl der Frequenzpunkte eine Potenz von 2 ist, reduziert sich die Anzahl der Rechenoperationen dramatisch und es wird aus der DFT die „schnelle Fouriertransformation“ FFT (Fast Fourier Transform).

1 Signale im Regelkreis

Um in einen Prozeß gezielt eingreifen zu können bedarf es Stellglieder, die auf bestimmte Größen des Prozesses wirken. So können etwa Piezo-Aktoren die radiale Lage einer Welle Am Ort eines Lagers beeinflussen (Abb. 1). Der Aktor wird angetrieben durch einen Verstärker, dessen Ausgangsspannung im Bereich mehrerer hundert Volt liegt und die gesteuert wird durch ein Eingangssignal im Bereich 0 bis 10V. Der Verstärker bezieht sein Eingangssignal von einem Digital-Analog-Wandler, der das Ergebnis des Regelalgorithmus im Digitalregler, das als Zahl vorliegt und die Stellgröße darstellt, in die für die Stelleinrichtung erforderliche analoge Größe umwandelt.

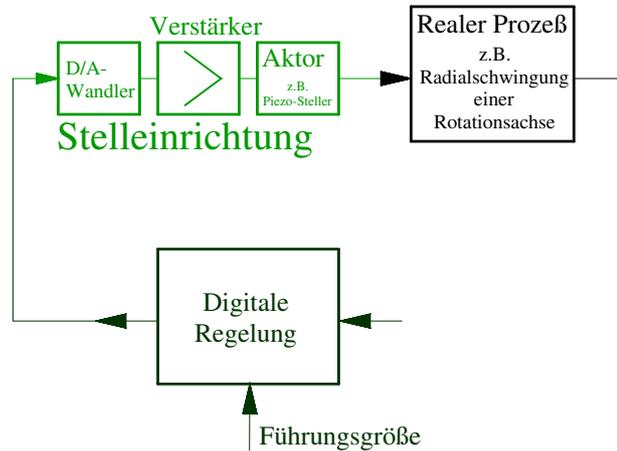


Abb. 1 Beeinflussung des Prozesses durch den Regler mit Hilfe von Aktoren

Um geeignet auf die Zustandsgrößen Einfluß nehmen zu können, muß der Regler den momentanen Zustand kennen. Sensoren erfassen einige dieser Zustandsgrößen, z.B. die radiale Lage einer Welle. Das Signal wird verstärkt und analog aufbereitet, also zum Beispiel in ein Normsignal zwischen 0 und 10 V umgewandelt (Abb. 2).

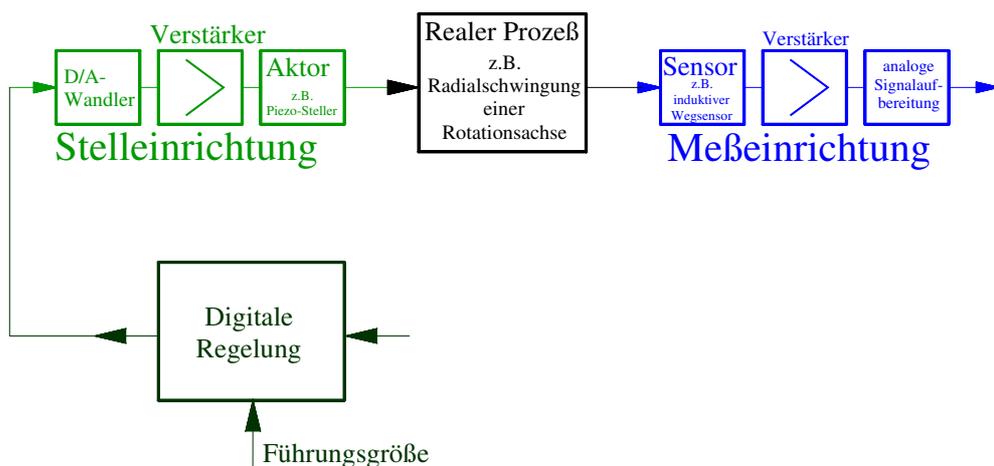


Abb. 2 Erfassung und Aufbereitung von Zustandsgrößen durch die Meßeinrichtung

Analoge Aktoren beeinflussen den Prozess

Digitale Stellgrößen werden in analoge umgewandelt und geeignet aufbereitet

Analoge Meßsignale müssen in digitale Signale gewandelt werden

Meßsignale müssen vor der Verarbeitung in einem Regelalgorithmus geeignet aufbereitet werden

Diese zur Meßgröße analoge Spannung wird einer weiteren Verarbeitung unterzogen, bevor der digitalen Regler aus ihr nach Vergleich mit der Führungsgröße eine digitale Stellgröße mit Hilfe des Regelalgorithmus erzeugen kann. Dazu wird der zur Meßgröße analoge Spannung zu diskreten Zeiten im Abstand $\Delta\tau$ zunächst durch einen Analog-Digitalwandler in eine Zahl umgewandelt. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß diese Wandlung in vernachlässigbar kurzer Zeit zu denjenigen Zeitpunkten erfolgt, zu denen der Abtastkontakt in Abb. 3 kurzzeitig geschlossen ist.

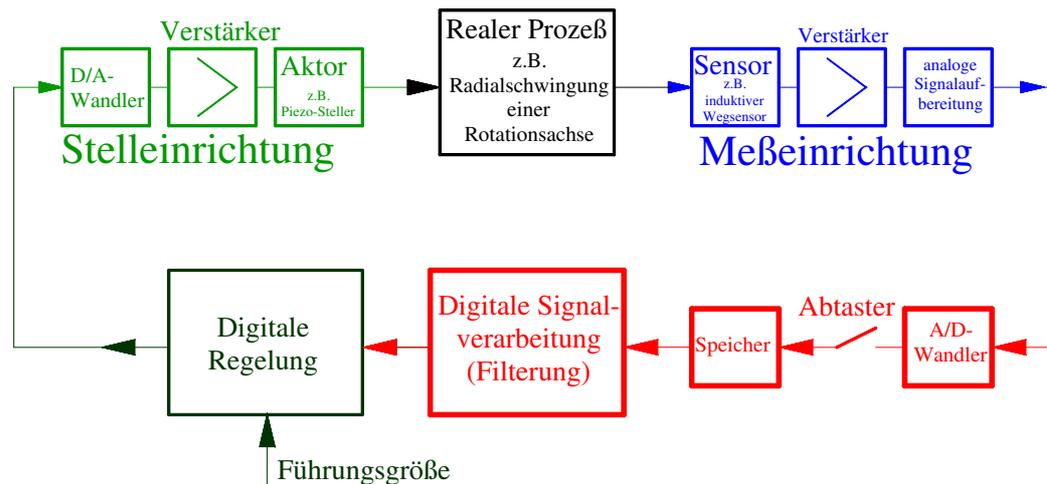


Abb. 3 Abtastung, Speicherung und digitale Aufbereitung des Meßsignals

Diese Abtastwerte müssen jeweils so lange gespeichert werden, bis nach der Zeit $\Delta\tau$ der nächste Abtastwert vorliegt.

Unerwünschte Störungen müssen durch digitale Filter unterdrückt werden

1.1 Beseitigung von Störungen im Sensorsignal durch Filterung

Im allgemeinen ist das Meßsignal durch Störungen verfälscht. Daher muß es in geeigneter Weise von den Störungen weitgehend befreit, also „gefiltert“ werden. Diese Filterung ließe sich zwar im Prinzip auch bereits vor der Umwandlung in zeitdiskrete Abtastwerten erledigen, jedoch bietet die Verlagerung auf die Seite nach der Abtastung gewaltige Vorteile: Ein digitales Filter, das ebenso wie der Regler als Algorithmus vorliegt, verändert seine Eigenschaften weder aufgrund von Umwelteinflüssen, wie Temperatur oder Feuchtigkeit, noch aufgrund von Alterung, da die Filterkoeffizienten Zahlenwerte sind, die in einem ROM abgelegt sind, und nicht Kapazitäten, Widerstände oder Operationsverstärker. Die Resonanzfrequenz eines analogen Schwingkreises wandert, die eines digitalen nicht.

Abb. 4 zeigt ein periodisches Sensorsignal, das durch Störungen so verfälscht ist, daß man das Nutzsignal nicht zu erkennen vermag. Nach der Filterung sind die Störungen weitgehend beseitigt und das Nutzsignal nach einem Einschwingvorgang wieder hergestellt.

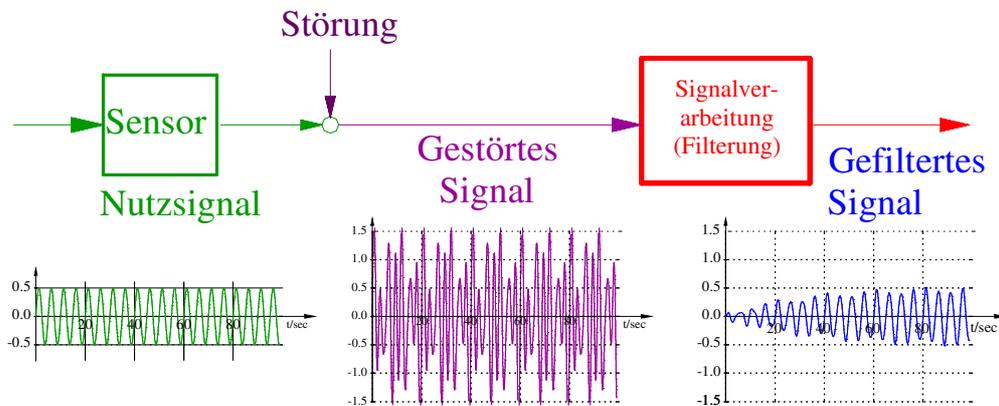


Abb. 4 Filterung eines durch Störungen verfälschten Sensorsignals

Beseitigung störender Frequenzen durch einen digitalen Bandpaß

1.2 Analoge und digitale Filterung - Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Um Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen analoger und digitaler Filterung zu studieren werde ein einfacher RC-Tiefpaß betrachtet.

Analoge Filter als Grundlage zur Entwicklung digitaler Filteralgorithmen

1.2.1 Beschreibung des analogen Tiefpasses 1. Ordnung im Frequenzbereich

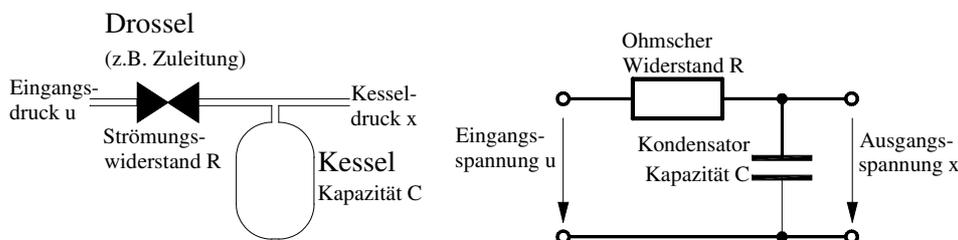


Abb. 5 PT₁-System wirkt als Tiefpaß

Die Übertragungsfunktion des (analogen) Tiefpasses G_{ATP} hat die Form

$$G_{ATP}(s) = \frac{1}{s \cdot R \cdot C + 1} \quad (1)$$

Für technisch-physikalische Kreisfrequenzen $s = j\omega$ erhält man den Frequenzgang $G(j \cdot \omega)$, der sich für ω von 0 bis ∞ als Ortskurve des Frequenzgangs darstellen läßt. Trennt man die Amplituden- und die Phaseninformation und stellt den Amplitudenverlauf in doppelt- und den Phasenverlauf in einfachlogarithmischem Maßstab dar, so erhält man das Bodediagramm mit dem Amplitudengang

Übertragungsfunktion eines analogen Tiefpasses

$$a = 20 \cdot |G_{ATP}(j \cdot \omega)| = -10 \cdot \log((\omega \cdot R \cdot C)^2 + 1) \quad (2)$$

und dem Phasengang

$$b = \arg(G_{ATP}(j \cdot \omega)) = -\arctg(\omega \cdot R \cdot C) \quad (3)$$

Aufgabe 1	Berechnen Sie allgemein aus (1) den Amplitudengang $ G_{ATP}(j \cdot \omega) = G_{ATP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) $ und stellen Sie diesen Amplitudengang (also ohne den Betrag zu logarithmieren und mit 20 zu multiplizieren) für $T = R \cdot C = [1/(2 \cdot \pi \cdot 0.2)] \cdot \text{sec}$ über der Frequenz f (lineare Teilung) bis $f = 2\text{Hz}$ auf.
------------------	---

Dreidimensionale Darstellung des Betrags der Übertragungsfunktion $|G(s)| = |G(\sigma + j\omega)|$

Dieser Amplitudenverlauf ergibt sich aus dem Gebirge $|G_{ATP}(s)|$ über der komplexen „Frequenz“ $s = \sigma + j\omega$ als Schnitt der Ebene, die von der $j \cdot \omega$ -Achse und der $|G_{ATP}(s)|$ -Achse aufgespannt wird. Man kann sich dieses Gebirge als elastische Gummihaut vorstellen, die auf allen Seiten im Unendlichen in der s -Ebene festgeheftet ist und die auf der negativ-reellen Achse bei der Kreisfrequenz $s = -\sigma_0 = -2 \cdot \pi \cdot f_g = -1/(R \cdot C)$ durch einen senkrechten Stab im Unendlichen aufgespannt wird. Abb.

6 zeigt das Gebirge, wobei die nach rechts gehende Achse die technisch-physikalische Frequenz $j \cdot f = j \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$ und die Achse nach vorne den für das Abklingverhalten der Schaltung verantwortlichen Realteil $\frac{\sigma}{2 \cdot \pi}$ darstellt. Die Schnittfläche vorne ist der linear aufgetragene Frequenzgang $|G(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)|$

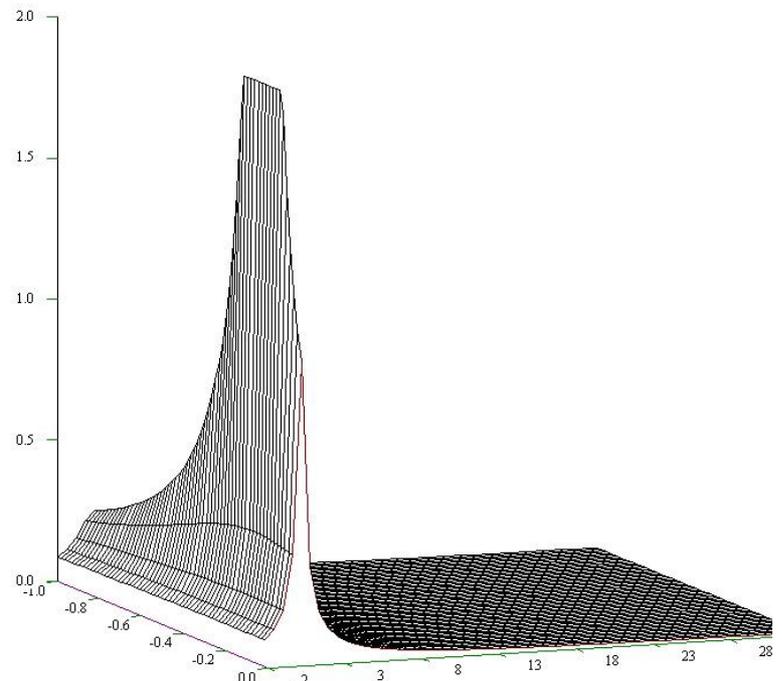


Abb. 6 Dreidimensionale Darstellung des Frequenzgangs $|G_{ATP}(s)|$, Achsteilungen $\frac{s}{2 \cdot \pi}$ in Hz

Amplitudengang als Schnittkurve zwischen dem $|G(s)|$ -Gebirge und der $|G(s)|$ - $j2\pi f$ -Ebene

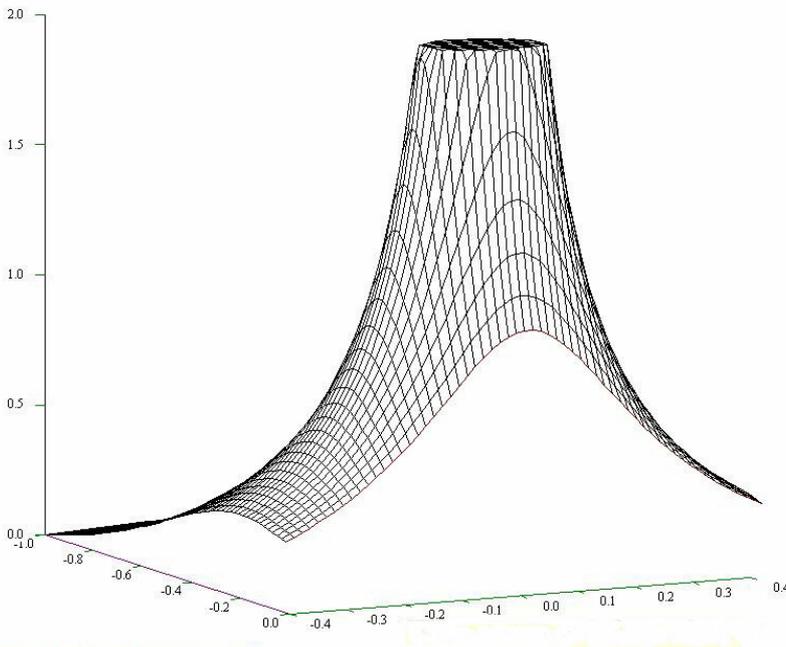


Abb. 7 Einfluß des Pols bei $s = -2 \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot \text{sec}^{-1}$ auf den Frequenzgang $|G_{\text{ATP}}(j \cdot 2 \cdot \pi)|$ längs der imaginären Achse, Achsteilungen in Hz

Wird die imaginäre Frequenzachse in logarithmischem Maßstab eingeteilt und auf der Ordinate $a = 20 \cdot \log|G_{\text{ATP}}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)|$, so wird aus der vorderen Schnittfläche in Abb. 6 und Abb. 7 für $f > 0$ das Bodediagramm in **Abb. 8**.

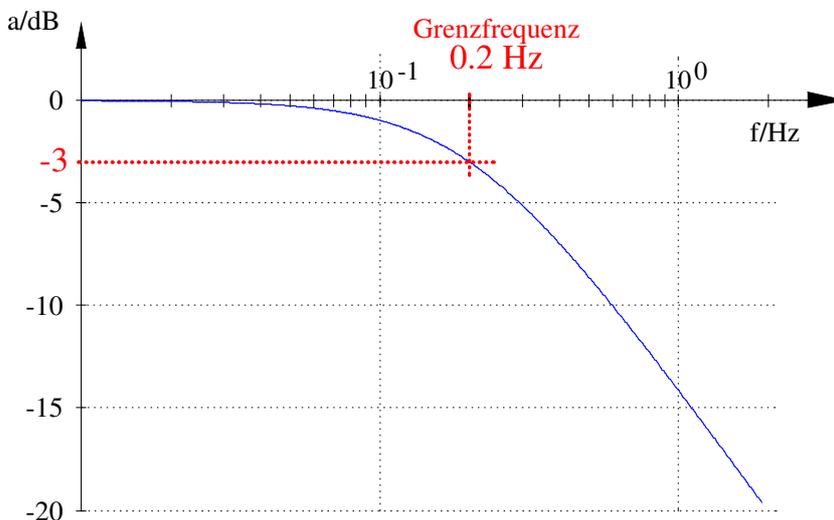


Abb. 8 Bodediagramm des Tiefpasses mit Grenzfrequenz 0.2Hz

$|G(\sigma+j\omega)|$ -Gebirge

Doppelt logarithmische Darstellung der Schnittkurve ist der Amplitudengang im Bodediagramm $a = 20 \cdot \log|G(j2\pi f)|$

Differentialgleichung des Tiefpasses 1. Ordnung

Näherung durch Ersetzen des Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten

ergibt die

Differenzgleichung des digitalen Tiefpasses 1. Ordnung

1.2.2 Näherung der Differentialgleichung des analogen Tiefpasses durch eine Differenzgleichung

Aus der Übertragungsfunktion (1) des Tiefpasses ergibt sich unmittelbar mit der Laplace-Transformation die Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot T + x = u \quad (4)$$

Ersetzt man den Differentialquotienten zum Zeitpunkt t_i durch die Näherung

$$\dot{x}(t_i) = \dot{x}_i \approx \frac{x(t_i) - x(t_i - \Delta\tau)}{\Delta\tau} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta\tau} \quad (5)$$

und das Eingangssignal $u(t)$ durch seinen Abtastwert $u(t_i) = u_i$, so erhält man als diskrete Näherung die Differenzgleichung

$$x(t_i) = \frac{T}{T + \Delta\tau} \cdot x(t_i - \Delta\tau) + \frac{\Delta\tau}{T + \Delta\tau} u(t_i) \quad (6)$$

oder kompakter geschrieben

$$x_i = K \cdot x_{i-1} + L \cdot u_i$$

mit

$$K = \frac{T}{T + \Delta\tau} \quad \text{und} \quad L = \frac{\Delta\tau}{T + \Delta\tau} = 1 - K \quad (7)$$

Aufgabe 2	Führen Sie die Berechnung zwischen (4) und (6) durch.
------------------	---

Aufgabe 3	Ersetzen Sie in (5) die interpolierende Näherung des Differentialquotienten durch die extrapolierende Näherung $\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i + \Delta\tau) - x(t_i)}{\Delta\tau} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta\tau}$ und berechnen Sie die extrapolierende Differenzgleichung $x_{i+1} = f(x_i, u_i)$
------------------	---

1.2.3 Blockschaltbild der Differenzgleichung

Das Ausgangssignal x_i ergibt sich offensichtlich als Summe des mit L gewichteten Eingangssignals u_i zum selben Zeitpunkt t_i und den um die Zeit $\Delta\tau$ zeitlich nach

hinten verschobenen Ausgangssignalwert, also eines Totzeitsystems. Die Übertragungsfunktion eines solchen Totzeitgliedes mit der Totzeit $\Delta\tau$ hat die Form $e^{-s \cdot \Delta\tau}$. Sie folgt aus dem Verschiebungssatz der Laplacetransformation. Damit kann man nun die Differenzgleichung (7) darstellen durch das Blockschaltbild in Abb. 9.

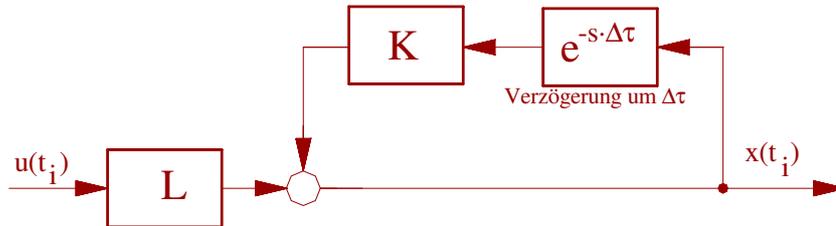


Abb. 9 Blockschaltbild des digitalen Tiefpasses

Die Exponentialfunktion $e^{s \cdot \Delta\tau}$ kommt sehr häufig vor und wird daher mit z abgekürzt:

$$z = e^{s \cdot \Delta\tau} \tag{8}$$

Da zur Bildung des neuen Ausgangswerts x_i wiederholt das alte, um $\Delta\tau$ verzögerte Signal x_{i-1} verwendet wird, liegt eine rekursive Berechnung vor. Daher heißt ein derart realisiertes Digitalfilter „**Rekursives Digitalfilter**“

Blockschaltbild der Differenzgleichung bzw. des digitalen rekursiven Tiefpasses 1. Ordnung

Filterausgang x_i wird rekursiv mit Hilfe des vorangehenden Filterausgangssignals x_{i-1} ermittelt
 →
„Rekursives Digitalfilter“

1.2.4 Frequenzgang des digitalen Tiefpasses

Um Unterschiede zwischen dem analogen und dem digitalen Tiefpaß erkennen zu können, wird nun der Frequenzgang ermittelt. Zwar ließe er sich auch unmittelbar aus dem Blockschaltbild Abb. 9 des digitalen Tiefpasses ableiten. Um aber einen tieferen Einblick in die Funktionsweise eines Digitalfilters zu gewinnen wird nun der unmittelbarere Weg über den Zeitbereich beschritten.

1.2.4.1 Herleitung der Übertragungsfunktion durch Anregung der Differenzgleichung mit einem sinusförmigen Signal

Zur Ermittlung des Frequenzgangs, ohne zunächst die Übertragungsfunktion zu kennen wie beim analogen Filter, kann man auf die Differenzgleichung ein sinusförmiges Eingangssignal $u(t)$ mit der Kreisfrequenz ω geben und nach geraumer Zeit, also für einen ausreichend hohen Index $u(t_n)$, die Amplitude $x(t_n)$ des Tiefpasses durch die Eingangsamplitude dividieren. Damit hat man für den Frequenzpunkt ω den Wert der Übertragungsfunktion $G_{DTP}(j\omega)$ des digitalen Tiefpasses. Eine reelle Sinusfunktion für sich ist sehr spröde handhabbar, läßt

Anregung eines rekursiven Tiefpasses mit einem sinusförmigen

... liefert als Ausgang des Filters ein sinusförmiges Signal mit der gleichen Frequenz, aber anderer Amplitude und Phasenlage

Statt „spröder“ Sinusfunktion Verwendung eines rotierenden Zeigers

Berechnung der Antwort des Systems auf den rotierenden Zeiger durch wiederholtes Einsetzen in die Differenzgleichung

Das Ausgangssignal läßt sich als geometrische Reihe darstellen

sich aber elegant darstellen als Imaginärteil der komplexen Funktion $e^{j\omega t}$ oder unmittelbar auch durch die Beziehung $\frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$. Wir beschreiten nun den Weg, als Eingangsfunktion $u(t)$ der mathematischen Einfachheit halber den komplexen rotierenden Zeiger $e^{j\omega t}$ zu verwenden. Dieser Zeiger beginnt bei $t = 0$ zu rotieren. Die Filterausgangswerte $x(t_i)$ für $t_i < 0$ sind Null, ebenso die Eingangssignalewerte $u(t_i)$. Da die Eingangsfunktion nur zu den Abtastzeiten $t_i = i \cdot \Delta\tau$ abgefragt wird, sind nur die Eingangssignalewerte

$$u(t_i) = u_i = e^{j\omega \cdot t_i} = e^{j\omega \cdot (i \cdot \Delta\tau)} \quad (9)$$

von Bedeutung.

Zum Zeitpunkt $t_i = i \cdot \Delta\tau = 0$ mit $i = 0$ nimmt das Eingangssignal den Wert $e^0 = 1$ an. Damit und mit der Rekursionsgleichung (7) ist das Filterausgangssignal zum Zeitpunkt $t_0 = 0$

$$x_0 = K \cdot x_{-1} + L \cdot u_0 = 0 + L \cdot e^0 = L \quad (10)$$

Wiederholtes Einsetzen führt zunächst auf die Summe

$$\begin{aligned} x(n \cdot \Delta\tau) &= x_n \\ &= K \cdot x_{n-1} + L \cdot u_n = \dots = \\ &= K^n \cdot L \cdot u_0 + K^{n-1} \cdot L \cdot u_1 + K^{n-2} \cdot L \cdot u_{[n-(n-2)]} + \dots \\ &\quad \dots + K^1 \cdot L \cdot u_{\{n-[n-(n-1)]\}} + K^0 \cdot L \cdot u_{\{n-[n-0]\}} \end{aligned} \quad (11)$$

die sich mit dem Summenzeichen darstellen läßt zu

$$x_n = L \cdot \sum_{i=0}^n K^i \cdot u_{n-i} \quad (12)$$

Beziehung (12) gilt für beliebige Eingangssignale. Setzt man nun den rotierenden Zeiger (9) in die Summe ein, so entsteht eine geometrische Reihe, die sich mit der

Summenformel für Reihen in geschlossener Form darstellen läßt:

$$\begin{aligned}
 x_n &= L \cdot \sum_0^n K^i \cdot e^{j \cdot \omega \cdot (n-i) \cdot \Delta\tau} = \\
 &= e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot \Delta\tau} \cdot L \cdot \sum_0^n K^i \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (i \cdot \Delta\tau)} = \\
 &= e^{j \cdot \omega \cdot n \cdot \Delta\tau} \cdot L \cdot \frac{1 - K^{(n+1)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (n+1) \cdot \Delta\tau}}{1 - K \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta\tau}}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Vorneweg steht der rotierende Zeiger als Eingangssignal zu den Abtastzeitpunkten $n \cdot \Delta\tau$. Im Laufe der Zeit, also für zunehmende n , verschwindet der zweite Summand im Zähler wegen $K < 1$ (siehe (7)) und es entsteht der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 x_n &= e^{j \cdot \omega \cdot (n \cdot \Delta\tau)} \cdot L \cdot \frac{1}{1 - K \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta\tau}} \\
 &= u_n \cdot \frac{L}{1 - K \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta\tau}} = u_n \cdot G_{DTP}(j \cdot \omega)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Das Ausgangssignal x_n des Digital-Tiefpasses ist offensichtlich wieder ein mit derselben Frequenz ω rotierender Zeiger, wobei lediglich die Amplitude und die Phase mit dem frequenzabhängigen Faktor $G_{DTP}(j \cdot \omega)$ modifiziert wird.

$G_{DTP}(j \cdot \omega)$ ist der komplexe Frequenzgang des digitalen Tiefpasses. Erweitert man die Funktion wieder auf die ganze komplexe Ebene, so entsteht nach (7) mit $L = 1 - K$ die Übertragungsfunktion $G_{DTP}(s)$

$$G_{DTP}(s) = \frac{1 - K}{1 - K \cdot e^{-s \cdot \Delta\tau}} = \frac{1 - K}{1 - K \cdot z^{-1}} \tag{15}$$

1.2.4.2 Blockschaltbild analoger und digitaler Systeme – Zusammenhang mit Laplace- und z-Transformation

Diese Übertragungsfunktion (16) hätte man rein formal ebenso unmittelbar aus dem Blockschaltbild für die Differenzgleichung (Abb. 9) ableiten können. Verwendet man nun noch die Abkürzung (8) für den Exponentialausdruck, so erhält man die z-Transformierte der Differenzgleichung (7).

Der Zusammenhang zwischen Differentialgleichung und Übertragungsfunktion analoger Systeme ist ganz ähnlich dem zwischen Differenzgleichung und z-Transformierter.

Diese geometrische Reihe läßt sich in geschlossener Form darstellen.

Aufspaltung in die beiden Faktoren „anregender Zeiger $e^{j\omega}$ “ und „zeitunabhängiger Quotient“

Der zeitunabhängige Quotient ist die Übertragungsfunktion G_{DTP} des digitalen Tiefpasses 1. Ordnung

Ersetzen der e-Funktion durch z ergibt die z-Transformierte der Differenzgleichung

Bei der Laplace-Transformation wie bei der z-Transformation geht der Nenner der Übertragungsfunktion in das Ausgangssignal, der Zähler in das Eingangssignal über. Während bei der Laplace-Transformation eine Multiplikation mit s zu einer Differentiation des Zeitsignals führt, bewirkt bei der der z-Transformation eine Multiplikation mit z^{-1} eine Verzögerung des entsprechenden Signals um ein Abtastintervall Δt .

	Analoger Tiefpaß	Digitaler Tiefpaß
Übertragungsfunktion	$G_{ATP} = \frac{1}{s \cdot T + 1}$ $= \frac{1}{1 + s \cdot T}$	$G_{DTP} = \frac{1 - K}{1 - K \cdot z^{-1}}$
Gleichung im Zeitbereich	$\dot{x} \cdot T + x = u$	$-K \cdot x_{i-1} + x_i = (1 - K) \cdot u_i$

Das Blockschaltbild einer Rückführschaltung (Abb. 10) führt auf die Übertragungsfunktion

$$G = \frac{1}{\frac{1}{G_{\text{vor}}} \pm G_{\text{rück}}} \quad (16)$$

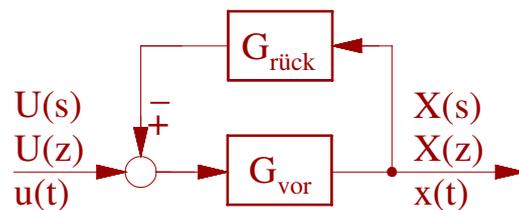


Abb. 10 Blockschaltbild einer Rückführschaltung

Wählt man bei den Übertragungsfunktionen $G_{ATP}(s)$ und $G_{DTP}(z)$ jeweils die 1 im Nenner als G_{vor} und $s \cdot T$ bzw. $z^{-1} \cdot K$ als $G_{\text{rück}}$, so ergeben sich die Blockschaltbilder für den analogen und den digitalen Tiefpaß, bestehend aus den elementaren dynamischen Gliedern P-Glied mit Verstärkung 1 sowie Differenzierglied bzw. Verzögerungsglied nach (Abb. 11). Der Faktor $1-K$ im Zähler des digitalen Tiefpasses wird berücksichtigt als Hintereinanderschaltung eines P-Glieds mit Verstärkung $1 - K$ zur Rückführschaltung.

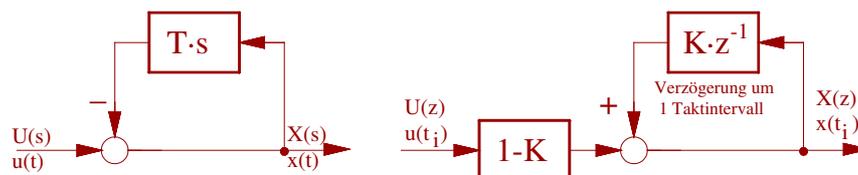


Abb. 11 Blockschaltbild des analogen und des digitalen Tiefpasses

Ein Blockschaltbild des analogen Systems läßt sich direkt aus der Übertragungsfunktion oder aus der Differentialgleichung gewinnen

Das Blockschaltbild des digitalen Systems wird aus der z-Übertragungsfunktion bzw. direkt aus der Differenzgleichung gebildet.

1.2.4.3 Frequenzgang eines analogen und eines digitalen Tiefpasses

Der Frequenzgang des analogen Tiefpasses wurde bereits in Kap.1.2.1 ausführlich hergeleitet. Für den digitalen Tiefpaß gehen wir von (15) aus und betrachten die Übertragungsfunktion $G_{DTP}(s)$ nur bei der technisch-physikalischen Kreisfrequenz $s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$.

Untersucht wird im folgenden nur das Amplitudenverhältnis zwischen Aus- und Eingangssignal des digitalen Tiefpasses, also nur $(|G_{DTP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)|)$.

Durch Anwendung der Eulerbeziehung und Bildung des Betrags mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich

$$|G_{DTP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)| = \frac{1 - K}{\sqrt{1 + K^2 - 2 \cdot K \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta\tau)}} \quad (17)$$

Frequenzgang des digitalen Tiefpasses für $s = j2\pi f$ aus der z-Übertragungsfunktion mit $z = e^{s \cdot \Delta\tau} = e^{j2\pi f \Delta\tau}$

Aufgabe 4	Führen Sie die einzelnen Schritte der Berechnung von (17) durch!
------------------	--

Stellt man $|G_{DTP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)|$ der Übertragungsfunktion des digitalen Tiefpasses dem Betrag des Frequenzgangs des analogen Tiefpasses

$$|G_{ATP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}} \quad (18)$$

gegenüber (siehe **Aufgabe 1**), so fällt sofort ins Auge, daß sich der Frequenzgang des digitalen Tiefpasses wiederholt mit der Periode $1/\Delta\tau$

Um auch qualitativ ein Gespür für die Zusammenhänge zu bekommen betrachten wir einen digitalen Tiefpaß, der aus dem analogen Tiepaß mit der 3-dB-

Grenzfrequenz $f_g = \frac{\omega_g}{2 \cdot \pi} = 0.2 \text{ Hz}$ hervorgegangen ist durch Abtastung mit dem Intervall $\Delta\tau = 0.1 \text{ sec}$

Frequenzgang des digitalen Filters ist periodisch mit der Abtastfrequenz $f_{\text{Abt}} = 1/\Delta\tau$

Bei direkter Ableitung des digitalen aus dem analogen Filter verschieben sich die Frequenzen mit abnehmender Abtastfrequenz hin zu niedrigeren Werten

Bis einen kleinen Bereich über die Grenzfrequenz hinaus verlaufen die Amplitudenverhältnisse Ausgang/Eingang für beide Tiefpässe wie die 3D-Schnittfläche in Abb. 7 annähernd gleich. Lediglich die Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses liegt etwas niedriger als die des analogen.

Auch wenn man den Bereich bis 5Hz erweitert (Abb. 13), kann man keine dramatische Abweichung zwischen den Amplitudengängen von digitalem und analogen Tiefpaß erkennen.

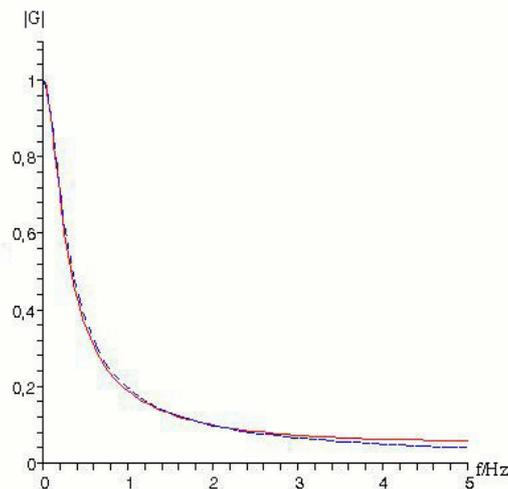


Abb. 13 Frequenzbereich bis zur halben Abtastfrequenz $1/2 \cdot \Delta\tau$

Der Amplitudengang des Filters ist periodisch mit der Abtastfrequenz

$$f_{\text{Abt}} = 1/\Delta\tau$$

Ein Signal mit einem ganzzahlig Vielfachen der Abtastfrequenz wird also ohne Schwächung durchgelassen. Allerdings erscheint es wegen der Rückfaltung nicht mehr in derselben Frequenz, sondern bei der Frequenz 0 (Stroboskop-Effekt).

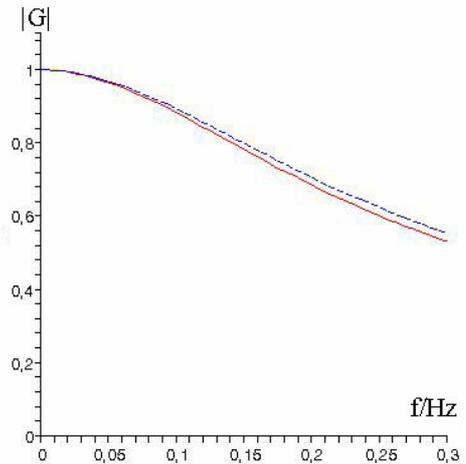


Abb. 12 Amplitudengang des analogen (durchbrochene blaue Linie) und des digitalen Tiefpasses

Erst bei Betrachtung eines weitaus größeren Frequenzbereichs erkennt man die Periodizität der Filtercharakteristik beim Digitalfilter im Gegensatz zum analogen Filter.

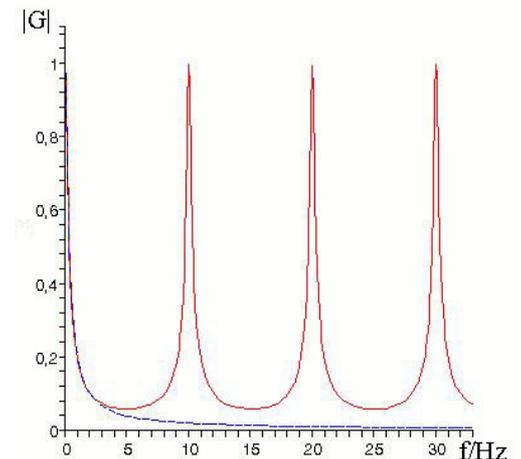


Abb. 14 Periodizität des Amplitudengangs eines Digitalfilters



Ein Signal, das mit einem digitalen Tiefpaß gefiltert wird, darf also von vornherein keine höheren Frequenzanteile haben, als die halbe Abtastfrequenz!

1.2.4.4 Einfluß der Länge des Abtastintervalles $\Delta\tau$ auf den Amplitudengang

Aus (17) folgt, daß der Amplitudengang periodisch ist mit der Abtastfrequenz $1/\Delta\tau$. Eine Verringerung der Abtastfrequenz auf ein Fünftel wirkt sich damit dramatisch auf den Amplitudengang des Tiefpasses aus.

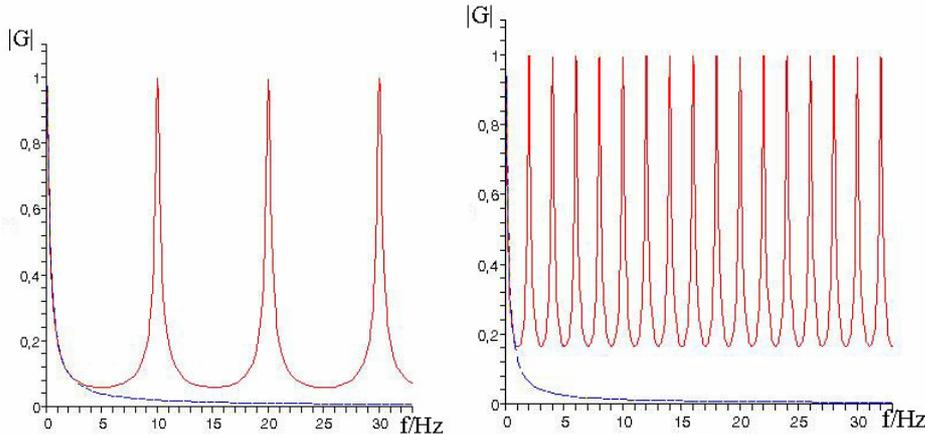


Abb. 15 Amplitudengänge zweier digitaler Tiefpässe, die sich nur im Abtastintervall unterscheiden, im Vergleich zum zugrunde liegenden analogen Tiefpaß

Eine Verringerung des Abtastintervalls hat also zur Folge, daß die höchsten Frequenzanteile, die im Eingangssignal sein dürfen, ebenfalls bei niedrigeren Frequenzen liegen.

1.2.4.5 Verschiebung der Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses gegenüber dem analogen Filter

Aus Abb. 12 ist zu sehen, daß die Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses etwas niedriger liegt, als die des analogen. Beim Entwurf des digitalen Tiefpasses muß dieser Effekt berücksichtigt werden. Er kommt um so stärker zum Tragen, je länger das Abtastintervall $\Delta\tau$ ist. Dies soll im folgenden quantifiziert werden. Nach (17) hat der periodische Amplitudengang des Tiefpasses den Verlauf

$$\left| G_{\text{DTP}}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \right| = \frac{1 - K}{\sqrt{1 + K^2 - 2 \cdot K \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta\tau)}} \quad (17)$$

Die Konstante K ergibt sich dabei aus der Zeitkonstanten T_{ATP} des analogen Tiefpasses und dem Abtastintervall $\Delta\tau$ des digitalen Tiefpasses nach Gleichung (7).

Die 3dB-Grenzfrequenz f_{gATP} des analogen Tiefpasses läßt sich mit T_{ATP} ausdrücken:

Zusammenhang Abtastfrequenz und Periodizität des Digitalfilters

Ermittlung der durch die Abtastung verschobenen Tiefpaß-Grenzfrequenz

3-dB-Grenzfrequenz der digitalen Übertragungsfunktion

$$f_{gATP} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot T_{ATP}} \quad (19)$$

Der 3dB-Amplitudenabfall bedeutet eine Abnahme der Amplitude auf $1/\sqrt{2}$. Für den Amplitudengang (17) des digitalen Tiefpaß gilt bei dessen Grenzfrequenz f_{gDTP} damit:

$$\frac{1 - K}{\sqrt{1 + K^2 - 2 \cdot K \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

Diverse Näherungen zur einfacheren Berechnung

Drückt man die Konstante K mit (7) und (19) durch f_{gATP} aus und nähert die Kosinusfunktion durch ihre Potenzreihe an, die nach dem quadratischen Glied abgebrochen wird, so ergibt sich die Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses:

$$f_{gDTP} = f_{gATP} \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta\tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_{gATP}}} \quad (21)$$

Zusammenhang der gewünschten digitalen Grenzfrequenz mit dem analogen Tiefpaß

Da unter der Wurzel auch der zweite Term klein gegenüber 1 ist, bietet sich als weitere Näherung die Reihenentwicklung der Wurzel mit Abbruch nach dem linearen Glied an, so daß sich endgültig die Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses als Näherung ergibt:

→

$$f_{gDTP} = f_{gATP} \frac{1}{1 + \Delta\tau \cdot \pi \cdot f_{gATP}} \quad (22)$$

Analoger Tiefpaß liefert bei Digitalisierung die richtige Grenzfrequenz des Digitalfilters

1.2.4.6 Phasengang des digitalen Tiefpasses

Aus der Übertragungsfunktion (14) und (15) läßt sich auch die Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingangssignal ermitteln. Auch hier treten Unterschiede zwischen dem analogen und digitalen Tiefpaß auf, die Einfluß auf den gesamten Regelkreis haben, in dem sich dieses Filter befindet.

Aufgabe 5	<ul style="list-style-type: none"> - Berechnen Sie allgemein aus den Übertragungsfunktionen des analogen und des digitalen Tiefpasses die Phasenverschiebungen zwischen Aus- und Eingangssignal. - Berechnen Sie für den betrachteten Tiefpaß mit Grenzfrequenz $f_g = 0.2\text{Hz}$ zahlenmäßig die Phasenverschiebungen für ein Eingangssignal mit der Frequenz $f = 0.2\text{Hz}$. Führen Sie die Berechnung neben dem analogen auch für die beiden digitalen Tiefpässe mit Abtastintervall 0.1 sec und 0.5 sec durch. - Welche Konsequenzen hat das Ergebnis für die Stabilität des Regelkreises, in dem diese Filter sitzen?
------------------	--

1.2.5 Zeitkontinuierliche Sinussignale zwischen Abtastung und analoger Ausgabe

Um ein Gespür für die Wirkung digitaler Filter zu bekommen werden im folgenden analoge Sinussignale verschiedener Frequenzen digitalisiert, durch das Tiefpaßfilter (7) geschickt und anschließend wieder in eine geeignete Form gebracht um analoge Stellglieder anzusteuern. Der Weg zwischen analogem Eingangssignal $u^*(t)$ und analogem Ausgangssignal $x^*(t)$ wird dabei in idealisierte Blöcke aufgeteilt.

Für die spätere mathematische Behandlung ist es einfacher, die Funktionen „Abtasten“, „Halten“ und „Speichern“ zu vertauschen. So soll ein Analog-Digital-Wandler das kontinuierliche analoge Signal $u^*(t)$ eine „kontinuierliche“ Zahlenfolge $u(t)$ abbilden, der im zeitlichen Abstand $\Delta\tau$ die Momentanwerte $u_i = u(t_i) = u(i \cdot \Delta\tau)$ entnommen und über den Zeitraum $\Delta\tau$ gespeichert werden bis zum nächsten Abtastzeitpunkt t_{i+1} . (Später werden wir dieses Abtast-Halteglied der einfacheren mathematischen Behandlung wegen darstellen als Diracimpuls-Abtaster und Halteglied).

Ähnlich wie die Übertragungsfunktion des nun folgenden Digitalfilters wiederholt sich wegen der Abtastung auch die abgetastete Sinusschwingung im Frequenzabstand $1/\Delta\tau$ als Oberschwingungen, wie später noch zu zeigen ist. Die entstehende Treppenfunktion wird dem digitalen Tiefpaß zugeleitet, der wieder eine Treppenfunktion ausgibt. Dieses vorbearbeitete Signal wird noch dem Regelalgorithmus unterzogen. Er liefert die Stellgröße, die an den D/A-Wandler geleitet wird.

Da auch im gefilterten und in ein analoges Signal gewandelten $x^*(t_i)$ wegen der Abtastung noch Schwingungen im Frequenzabstand $1/\Delta\tau$ vorhanden sind, müssen diese durch einen analogen Tiefpaß beseitigt werden, bevor das geglättete Signal $x(t)$ dem analogen Stellglied zugeführt wird.

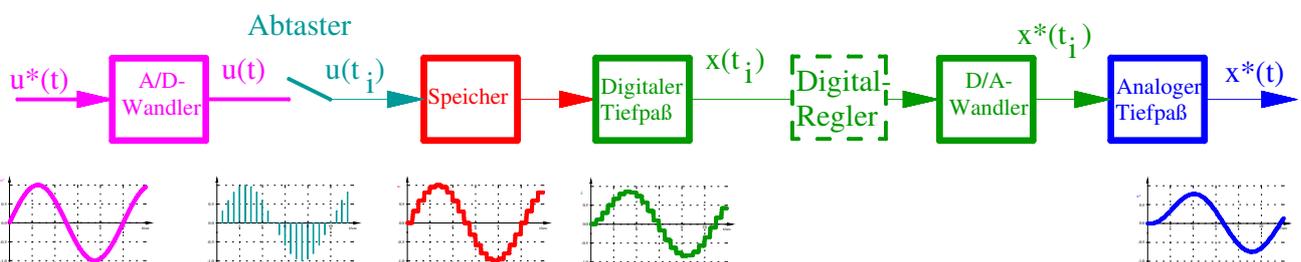


Abb. 16 Stationen des Signals vom analogen Eingang über die digitale Signalverarbeitung bis hin zur analogen Ausgabe

Anwendung des Tiefpaßfilters

Struktur der Signalübertragung zwischen analogem Eingangssignal über die digitale Signalverarbeitung bis hin zur analogen Ausgabe an die Peripherie

1.2.5.1 Sinusförmiges Eingangssignal bei der halben Grenzfrequenz des digitalen Tiefpasses

Im folgenden wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein sinusförmiges Signal (Frequenz $f = 0.1\text{Hz}$) auf den digitalen Tiefpaß (Grenzfrequenz $f_g = 0.2\text{Hz}$) geschaltet. Um den deutlichen Einfluß des Abtastintervalls auf die Phasenverschiebung und die Amplitudenverzerrung zu sehen, wird als Abtastintervall $\Delta\tau = 0.5\text{sec}$ und damit die Abtastfrequenz $f_{\text{Abt}} = 1/\Delta\tau = 2.0\text{Hz}$ gewählt.

Aufgabe 6	<p>Berechnen Sie das Amplitudenverhältnis zwischen Aus- und Eingangssignal sowie die Phasenverschiebung für den analogen und den daraus abgeleiteten digitalen Tiefpaß bei der Frequenz $f = 0.1\text{Hz}$</p> <p>Was wäre beim analogen Filter, abgesehen von der Treppenform anders und welche Auswirkung hat dies auf den Regelkreis? (Siehe auch Aufgabe 5)</p>
------------------	--

Glättung des stufenförmigen Ausgangssignals eines Digitalfilters durch einen (nichtperiodischen) analogen Tiefpaß

Ausreichende Glättung durch einen analogen Tiefpaß erster Ordnung führt zu weiteren Phasenverschiebungen

→

das Gesamtsystem eines geschlossenen Regelkreises wird instabiler

Aus Abb. 17 geht deutlich hervor, daß auch der nachgeschaltete analoge Tiefpaß zur Glättung des stufigen Digitalsignals noch eine weitere Phasenverschiebung und eine Amplitudendämpfung verursacht. Bedenkt man aber, daß bei einem Abtastintervall von 0.5sec , also einer Abtastfrequenz von 2Hz , die Filter-Durchlaßkurve nach Abb. 15 erst bei 1.0Hz sich zu wiederholen beginnt, kann man die Grenzfrequenz des

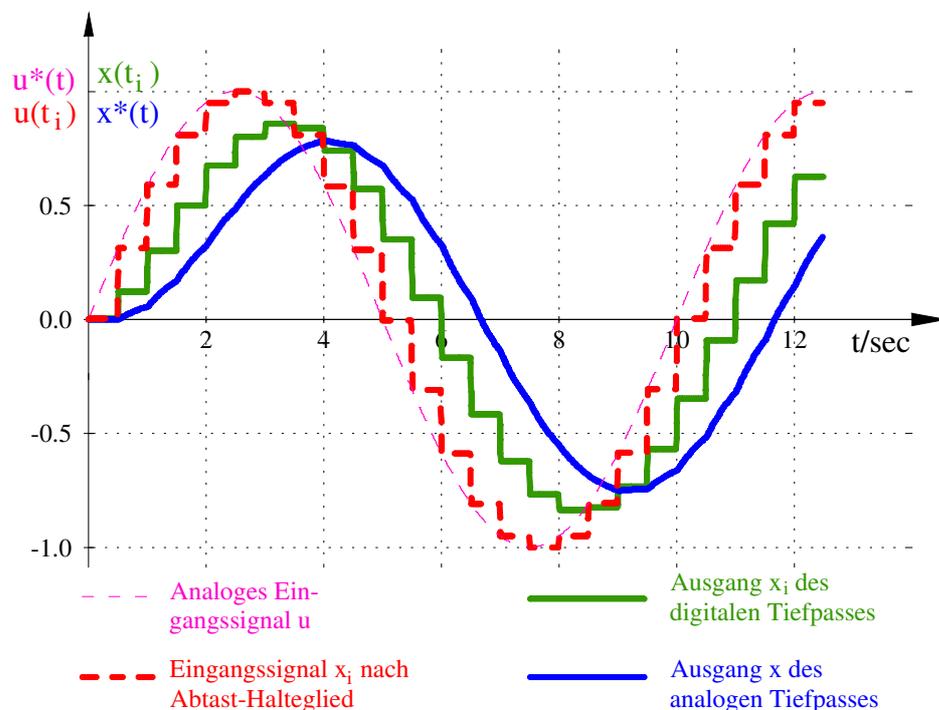


Abb. 17 Filterung eines Sinussignals, $f = 0.1\text{Hz}$, durch einen digitalen Tiefpaß 1. Ordnung mit $f_g = 0.2\text{Hz}$ und nachgeschaltetem Analog-Tiefpaß mit gleicher Grenzfrequenz

analogen Tiefpasses von 0.2 auf eine höhere Frequenz legen. Wählt man als Grenzfrequenz 0.8Hz, so ist der Einfluß deutlich geringer, auch wenn das analoge Signal nicht mehr so glatt ist. Ein zweiter Tiefpaß in Serie mit derselben Grenzfrequenz unterdrückt auch diese Restwelligkeit weiter, ohne die Phase noch stark zu verschieben (Abb. 18).

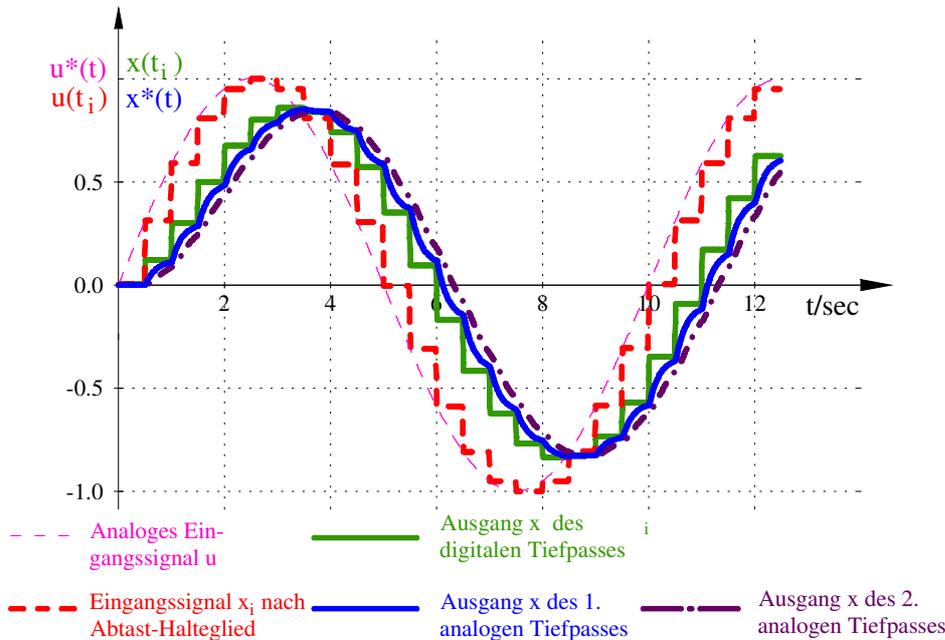


Abb. 18 Geringere Phasenverschiebung des analogen Ausgangssignals durch ein TP-Filter 2. Ordnung mit höherer Grenzfrequenz

Tiefpaß zweiter Ordnung bewirkt bessere Glättung bei geringerer Phasenverschiebung im interessierenden Bereich.

1.2.5.2 Reaktion des digitalen Tiefpasses auf ein Signal in der Nähe der Abtastfrequenz

Wie in Abb. 15 zu sehen ist, wiederholt sich der Amplitudengang mit der Abtastfrequenz $f_{\text{Abt}} = 1/\Delta\tau$. Bei der Abtastfrequenz $f_{\text{Abt}} = 2.0\text{Hz}$ erscheinen Sinussignale von 1.9Hz und 2.1Hz mit derselben Amplitude am Ausgang des Digitalfilters, wie das Sinussignal mit 0.1Hz.

Es tritt aber noch ein weiterer Effekt auf, den jeder aus alten Wildwestfilmen kennt, wenn die Speichenräder bei fahrenden Planwagen stillstehen oder sich sogar langsam nach rückwärts zu drehen scheinen. Auch jeder, der schon einmal mit dem Stroboskop eine rotierende Achse betrachtet hat, kennt diesen Effekt. Er wird als „Rückfaltung“ oder „Aliasing“ bezeichnet. Hier soll die Rückfaltung zusammen mit dem periodischen Amplitudengang des Digitalfilters nur veranschaulicht werden. Mit dieser Anschaulichkeit fällt es später leichter, die mathematische Herleitung in einem späteren Kapitel zu verstehen.

Signalverfälschung durch Rückfaltung („Aliasing“), falls die Frequenz des abgetasteten Nutzsignals höher als die halbe Abtastfrequenz ist

Eine Sinus-
schwingung mit
1.9Hz, abgetastet
mit 2.0 Hz, lie-
fert ein Aus-
gangssignal mit
0.1Hz

Wie in Abb. 19 zu sehen ist, hat das Stufensignal nach dem Abtast-Halteglied exakt die selbe Form und Frequenz, wie das Signal in Abb. 17, das aus der Abtastung der Sinusschwingung mit 0.1Hz hervorgegangen ist.

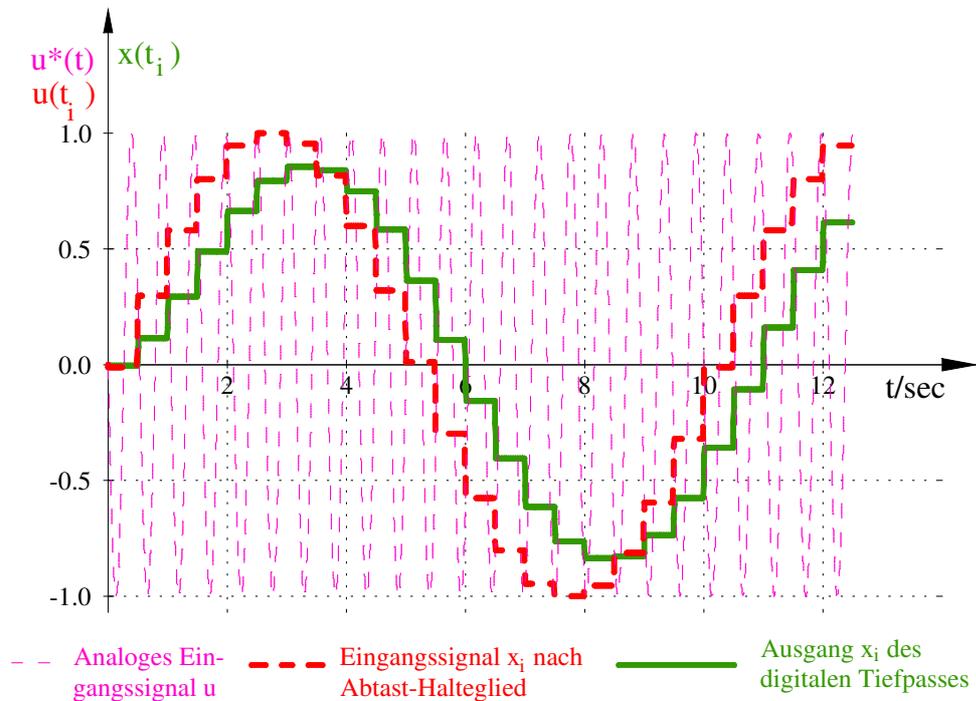


Abb. 19 Abtastung einer Schwingung von 1.9Hz mit der Abtastfrequenz $f_{\text{Abt}} = 2.0\text{Hz}$ und digitale Filterung

Natürlich hat auch dann das durch den digitalen Tiefpaß gefilterte Signal die Frequenz 0.1Hz als Ausgangssignal, und nicht die Frequenz 1.9Hz.

Damit also ein Digitalfilter sinnvolle Ausgangssignale liefert, müssen bereits vor der Abtastung Frequenzanteile im Eingangssignal, die größer als die halbe Abtastfrequenz sind, mit Hilfe analoger Filter beseitigt werden.

Diese Vorschrift entspricht dem Abtasttheorem von Shannon. Es besagt, daß nur Signale, deren höchster Frequenzanteil unterhalb der halben Abtastfrequenz liegen, wieder eindeutig als Analogsignal rekonstruierbar sind.

Wird also ein Signal mit der Frequenz f gefiltert, das in der Nähe der ganzzahlig Vielfachen der Abtastfrequenz $m \cdot f_{\text{Abt}}$ liegt, so erscheint diese Schwingung durch die Rückfaltung (Stroboskopeffekt) bei der Frequenz $f_{\text{R}} = |f - m \cdot f_{\text{Abt}}|$.

**Abtasttheorem
von Shannon**

1.3 Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse

Analoge und digitale Filter haben viele Gemeinsamkeiten, aber auch gravierende Unterschiede. Analoge Filter werden durch (kontinuierliche) lineare Differentialgleichungen beschrieben und haben ein Frequenzverhalten, das sich bis über alle Schranken hinweg ausdehnt.

Dagegen sind lineare Differenzgleichungen die Beschreibungsform digitaler Filter. Das Übertragungsverhalten digitaler Filter wiederholt sich mit der Periode der Abtastfrequenz $1/\Delta\tau$. Dies hat zur Folge, daß auf ein Digitalfilter nur Signale gegeben werden dürfen, deren höchster Frequenzanteil unterhalb der halben Abtastfrequenz liegt, da es sonst zu Rückfaltungen kommt und nicht vorhandene Signalanteile unterhalb dieser halben Abtastfrequenz vorgetäuscht werden.

Auch das Ausgangssignal digitaler Systeme beinhaltet Frequenzanteile, die eine periodische Fortsetzung des Anteils ab der Frequenz Null mit der Periode der Abtastfrequenz sind. Nach der Digital-Analogwandlung muß daher dieser Anteil mit einem analogen Filter beseitigt werden, bevor das Signal auf das analoge Stellglied geht.

Im einfachsten Fall erhält man ein Digitalfilter aus einem analogen Filter, indem man in der Differentialgleichung den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzt. Dieses Verfahren führt auf einen Algorithmus, bei dem je nach Ordnung n des Filters der aktuelle Wert aus dem aktuellen und $n-1$ zurückliegenden Eingangssignalen sowie $n-1$ zurückliegenden Ausgangssignalen des Filters gebildet wird. Das Ausgangssignal eines solchen Filters wird also rekursiv gebildet. Dies gibt dieser Art von Filtern den Namen „Rekursive Digitalfilter“.

Wählt man als Eingangssignal eines derartigen Filters einen Impuls, so ergibt sich infolge der Rekursion eine unendliche Folge der Ausgangssignalwerte, eine unendlich lange Impulsantwort, deren Amplitude bei Stabilität des Filters gegen Null geht. Diese Eigenschaft liefert den zweiten Namen für diese Klasse digitaler Systeme: Man spricht von IIR-Filtern. IIR ist die Abkürzung für „Infinite Impulse Response“.

Eine weitere Eigenschaft digitaler Filter ist die Tatsache, daß die Frequenzachse $j\omega$ von Null bis $j\infty$ beim digitalen System gestaucht wird auf den Bereich Null bis $\frac{1}{2 \cdot \Delta\tau}$. Dies führt dazu, daß auch die Kennfrequenzen des Filters, z.B. beim Tiefpaß die 3dB-Grenzfrequenz, zu tieferen Frequenzen hin wandern und muß beim Entwurf digitaler Filter berücksichtigt werden.

Digitales Ausgangssignal muß erst durch analogen Tiefpaß von höherfrequenten Anteilen befreit werden

„Stauchung“ des Frequenzbereichs bei einem Digitalfilter gegenüber einem analogen Filter

2 Analoge und digitale Signale

2.1 Lineare Systeme im Zeitbereich

Läßt man auf den Eingang eines linearen, zeitinvarianten Systems die Summe $u(t)$ zweier Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ wirken, so reagiert das lineare System mit seinem Ausgang $x(t)$ genauso, als wenn man die beiden Signale getrennt auf zwei gleiche parallele Systeme führt und deren Ausgangssignale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ addiert (Abb. 20).

Definitionseigen-
schaft linearer Sys-
teme:

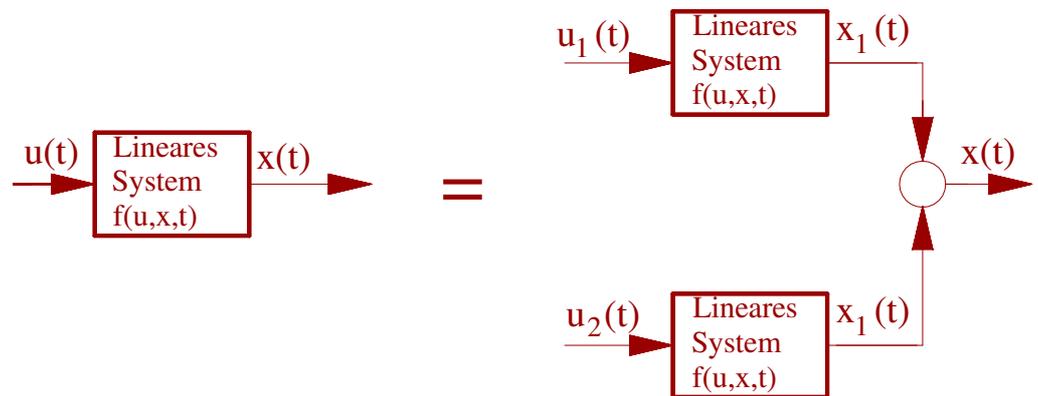


Abb. 20 Definitionseigenschaft der Linearität

Verallgemeinert gilt

$$f\left(\sum u_i\right) = \sum(f(u_i)) \quad (23)$$

Daraus folgt auch, daß ein Eingangssignal mit k -facher Amplitude auf ein k -faches Ausgangssignal führt.

Daher kann man ein
beliebiges Zeitsignal
durch die Summe
seiner sinusförmigen
Signale ersetzen

Diese Eigenschaft läßt sich ausnutzen, um beispielsweise ein periodisches Signal nach Fourier in seine Sinusanteile zu zerlegen und einzeln dem linearen System zuzuführen. Jede einzelne Sinusschwingung wird in der Phase und der Amplitude verändert. Die Summe dieser Sinusantworten des Systems ergibt die Reaktion des Systems auf das nichtsinusförmige periodische Signal. Dies ist die Grundüberlegung der gesamten Berechnungen linearer Systeme im Frequenzbereich mit Laplace- und Fouriertransformation. Daraus resultieren die bekannten Methoden wie Ortskurve des Frequenzgangs und Bodediagramm ebenso, wie die gesamte Berechnung der (rotierenden) Zeiger mit Hilfe der komplexen Zahlen.

Das Eingangssignal $u(t)$ läßt sich aber nicht nur in seine Spektralanteile zerlegen, sondern auch als eine Reihe aufeinanderfolgender Impulse darstellen.

Kennt man die Impulsantwort, so kann man die einzelnen Impulsantworten am

Ausgang des linearen Systems ebenso addieren und erhält die Reaktion $x(t)$ des Systems auf das gesamte Eingangssignal $u(t)$.

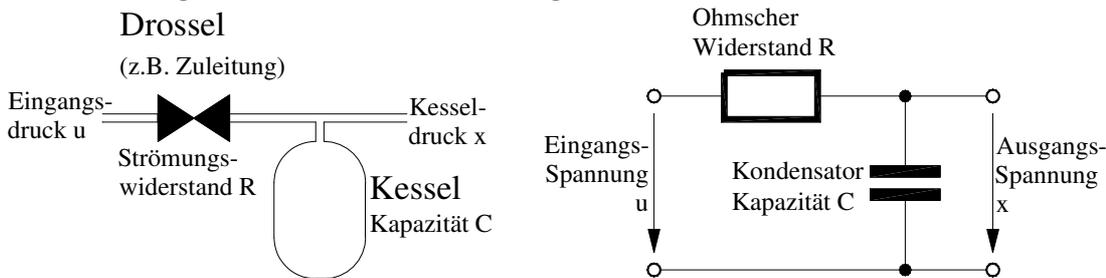
Diese für die analoge und digitale Signalverarbeitung äußerst wichtigen Zusammenhänge, bekannt als "Faltungssatz", werden im folgenden schrittweise erläutert. Sie werden wieder gebraucht bei der digitalen Filterung von Signalen mit den sogenannten FIR-Filtern (Finite Impulse Response), die auch Transversalfilter oder Nichtrekursive Filter genannt werden.

Um die Probleme zu verstehen, die bei der digitalen Signalverarbeitung, insbesondere infolge der Abtastung mit endlicher Frequenz, auftreten, wird im Anschluß daran aus der Fourieranalyse periodischer Signale die Fouriertransformation nichtperiodischer, energie- oder wenigstens leistungsbegrenzter Signale hergeleitet. Das Shannon'sche Abtasttheorem, dessen Auswirkungen jeder schon im Fernsehen oder Kino mit seiner Abtastfrequenz von 25 bzw. 24 Bildern pro Sekunde beim scheinbaren Stillstand oder dem Zurückdrehen von Postkutschenrädern in Western persönlich erlebt hat, begrenzt den Einsatz der digitalen Signalverarbeitung und erfordert manchmal eine analoge Vorbehandlung der Signale vor der digitalen Signalverarbeitung im Rechner.

Man kann ein Signal aber auch in eine Folge von Impulsen zerlegen

2.2 Impulsantwort eines Tiefpasses 1. Ordnung und Normimpuls $\delta(t)$

Wie bereits unter 2.1 erwähnt, läßt sich die Antwort eines linearen Systems dadurch ermitteln, daß man das kontinuierliche Eingangssignal in eine Summe aufeinanderfolgender Impulse zerlegt und nach dem linearen System die Impulsantworten überlagert. Im folgenden wird die Beschreibung eines linearen Systems durch seine Impulsantwort am Beispiel eines einfachen PT₁-Systems (Tiefpaß 1. Ordnung, Abb. 21) anschaulich hergeleitet.



Normimpuls $\delta(t)$ mit der Fläche 1 und (Norm-) Impulsantwort eines linearen dynamischen Systems

Abb. 21 Elektrischer und pneumatischer Tiefpaß

Dazu wird zunächst die Antwort eines elektrischen RC-Tiefpasses ($K = 1$, $T = 0.8 \text{ sec}$) auf einen Impuls mit der Amplitude u_0 mit der endlichen Dauer $\Delta\tau$ betrachtet (Abb. 22).

Bis zum Zeitpunkt $t = \Delta\tau$ folgt der Verlauf des Ausgangssignals x der Sprungantwort

Anschauliche Herleitung des Normimpulses und der Normimpulsantwort am Beispiel eines analogen Tiefpasses

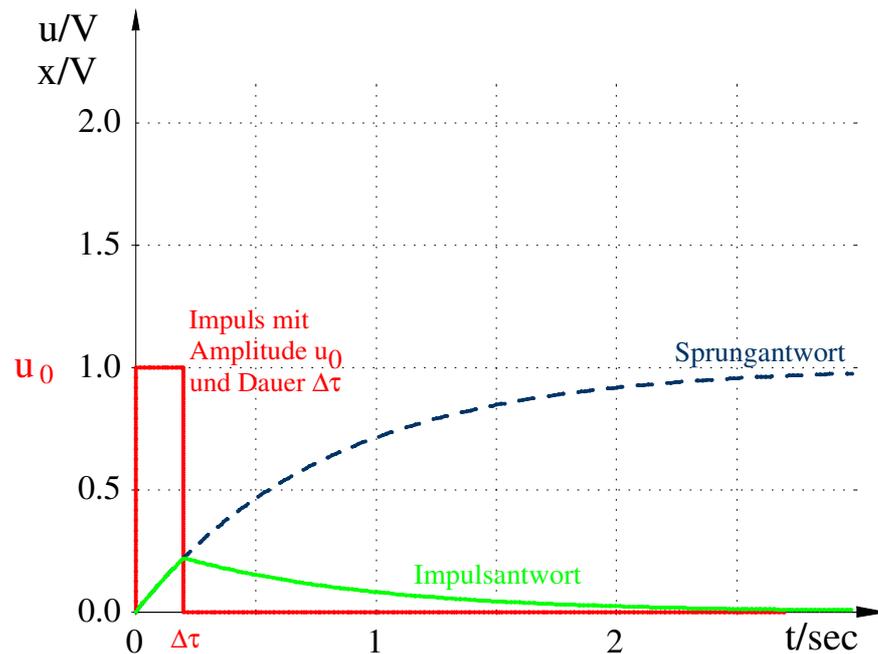


Abb. 22 Sprung- und Impulsantwort eines PT_1 -Systems (Tiefpaß 1. Ordnung) (*ImpAntw_PT1_dt.dwk*)

$$x(t) = u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (24)$$

Wegen $\Delta\tau \ll T$ läßt sich durch Reihenentwicklung und Abbruch nach dem linearen Glied dieser Bereich der Sprungantwort mit sehr guter Näherung als Gerade darstellen:

$$x(t) = u_0 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T} + \dots \right) \right) \approx u_0 \cdot \frac{t}{T} \quad (25)$$

Zum Zeitpunkt $t = \Delta\tau$ hat das Ausgangssignal x des Tiefpasses den Wert

$$x(\Delta\tau) = u_0 \cdot \frac{\Delta\tau}{T} \quad (26)$$

erreicht. Ab hier beginnt die eigentliche Antwort auf den nunmehr zurückliegenden Impuls mit der Impulsamplitude u_0 und der Dauer $\Delta\tau$

$$x_I(t) = u_0 \cdot \frac{\Delta\tau}{T} e^{-\frac{t-\Delta\tau}{T}} \approx u_0 \cdot \frac{\Delta\tau}{T} e^{-\frac{t}{T}} = u_0 \cdot \Delta\tau \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \quad (27)$$

bei der für sehr kleine Intervalle $\Delta\tau$, vor allem bei der folgenden fortgesetzten Halbierung dieses Intervalls, im Exponenten $\Delta\tau$ gegenüber t vernachlässigbar ist.

Verdoppelt man die Impulsamplitude und halbiert gleichzeitig die Impulsdauer auf die Hälfte, so entsteht die gleiche Impulsantwort, sieht man einmal von der Verschiebung um $\Delta\tau/2$ zu früheren Zeitpunkten hin ab (Abb. 23), denn wie in Gleichung (26) klingt das Ausgangssignal ja vom selben Ausgangswert

$$2 \cdot u_0 \cdot \frac{\Delta\tau/2}{T} = u_0 \cdot \frac{\Delta\tau}{T} \text{ aus ab.}$$

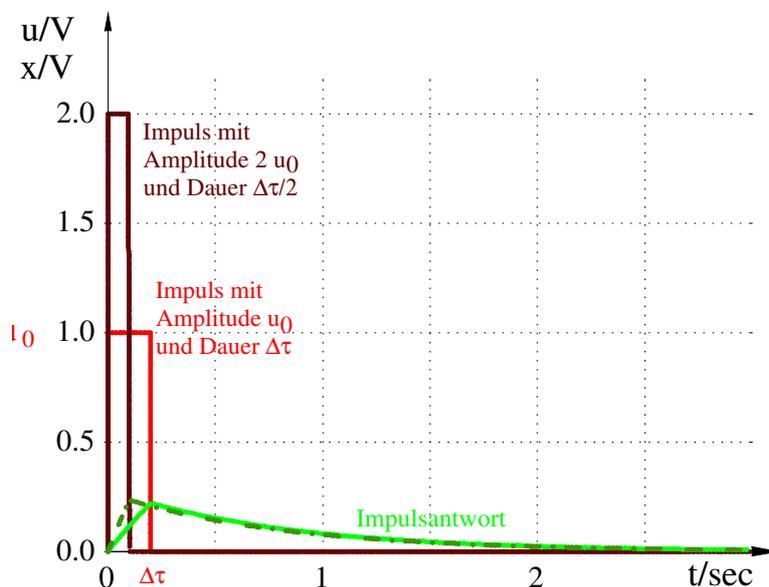


Abb. 23 Antwort auf einen Impuls mit doppelter Amplitude $2 \cdot u_0$, aber halber Dauer $\Delta\tau/2$

Dieses Verfahren der Halbierung der Impulsdauer und Verdoppelung der Amplitude könnte man noch beliebig fortsetzen. Solange das Integral über das Eingangssignal,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot d\tau = u_0 \cdot \Delta\tau \quad (28)$$

das sogenannte Impulsintegral, sich nicht ändert, antwortet das lineare dynamische System immer in gleicher Weise entsprechend (27).

Fortgesetzte Halbierung der Impulslänge bei gleichzeitiger Verdoppelung der Amplitude führt im Grenzübergang auf die von Paul Dirac eingeführte δ -Distribution

Dies ist ein Gebilde, das den klassischen Begriff „Funktion“ sprengt und erst 20 Jahre nach Einführung durch den Physiker Paul Dirac durch den Mathematiker Schwartz auf ein mathematisch widerspruchsfreies Fundament gestellt wurde.

Normimpuls mit der Fläche 1 und Impulsamplitude

Vervielfacht man aber die Impulsamplitude u_0 , ohne die Impulsdauer zu ändern, so erhält man wegen der Linearität des Systems erwartungsgemäß auch ein Vielfaches der Impulsantwort (Abb. 24).

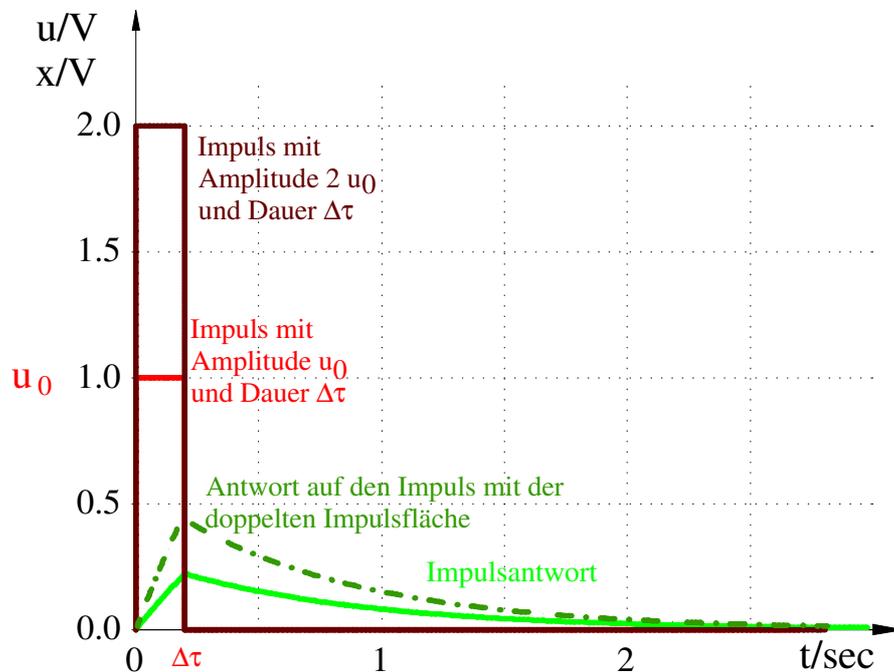


Abb. 24 Antwort auf zwei Impulse mit unterschiedlich großem Impulsintegral

2.3 Delta-Distribution und Normimpuls

Die in Kap. 2.2 gezeigten Zusammenhänge zwischen Impuls und der Reaktion des linearen Systems legen folgendes Verfahren nahe:

- Der Eingangsimpuls $u_I(t)$ (hier in der Dimension Volt oder Pascal) wird dargestellt als Produkt eines **Normimpulses** $\delta_E(t)$ mit dem **dimensionslosen** Impulsintegral 1 und dem dimensionsbehafteten Impulsintegral $u_0 \cdot \Delta\tau$ von u_i .
- Man ermittelt die **Normimpuls**-Antwort $g(t)$ eines dynamischen Systems auf diesen Normimpuls $\delta_E(t)$ mit der dimensionslosen Fläche 1.
- Die **Impulsantwort** x_I auf einen beliebigen Impuls u_I mit der Amplitude u_0 und der Dauer $\Delta\tau$ ergibt sich aus dem Produkt der **Impulsfläche** $u_0 \cdot \Delta\tau$ mit der **Normimpuls**-Antwort ("Gewichtsfunktion $g(t)$ ").

Der Normimpuls $\delta_E(t)$ mit endlicher Dauer $\Delta\tau$ läßt sich folgendermaßen definieren:

$$\delta_E(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau} & \text{für } 0 \leq t < \Delta\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (29)$$

Endlicher Normimpuls mit der Fläche 1

Damit ergibt sich als Darstellung für den Eingangsimpuls u_I

Impulsamplitude = Impulsintegral · Normimpuls

$$u_I = u_0 \cdot \Delta\tau \cdot \delta_E \quad (30)$$

Ermittlung der Normimpulsantwort aus der Impuls-Amplitudenantwort

Daraus folgt für die Impulsantwort, also dem **Amplitudenverlauf** der Antwort auf den Impuls $u_I(t)$:

Impulsantwort = Impulsintegral · Normimpuls-Antwort

$$x_I = u_0 \cdot \Delta\tau \cdot g(t) \quad (31)$$

Leider wird in der Literatur nur selten zwischen dem Impuls und dem Normimpuls und damit zwischen der Impulsantwort und der Normimpulsantwort unterschieden. Den Unterschied muß man sich aber immer vor Augen halten, um nicht in Schwierigkeiten mit der Dimension zu kommen.

Für den oben betrachteten Tiefpaß lautet die Normimpulsantwort (= Gewichtsfunktion $g(t)$) mit der Dimension 1/sec):

$$g(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (32)$$

Anwendung auf den analogen Tiefpaß erster Ordnung

während sich die Antwort auf den konkreten Impuls mit dem Impulsintegral $u_0 \cdot \Delta\tau$ aus (27) ergibt.

Läßt man das Intervall $\Delta\tau$ bei der Bildung des Normimpulses gegen 0 gehen, so entsteht ein Gebilde, das mit dem klassischen Begriff einer Funktion nach Dirichlet nicht mehr viel zu tun hat. Bei der klassischen Funktion ist jedem Wert der unabhängigen Variablen eindeutig ein Wert der abhängigen Variablen zugeordnet mit Ausnahme einzelner isolierter Werte, an denen der Funktionswert nicht definiert ist. Läßt man beim Normimpuls, der eine eindeutige Funktion darstellt, die Intervallbreite gegen Null gehen, so bleibt die Fläche beim Grenz-

übergang konstant 1, obwohl die Funktion überall Null ist mit Ausnahme des Abszissenwerts $t = 0$.

Diese Fläche unter der Funktion, die beim Grenzübergang konstant bleibt, wird auch zur Definition des Gebildes diese Fläche herangezogen:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 & \end{cases} \quad (33)$$

Wie schon so oft war es die Physik, die den Mathematikern nahelegte, ihre Beschreibungsmöglichkeiten widerspruchsfrei zu erweitern. Denn gerade solche Probleme, um die Mathematiker zunächst einen großen Bogen machen, treten bei der Modellbildung physikalischer Phänomene auf und die Natur kann ja offensichtlich nicht nur mit Impulsen, sondern auch mit Sprüngen etwas anfangen.

Der Engländer Paul Dirac, Nobelpreisträger des Jahres 1933, stieß 1926 auf diese Beschreibungsform (33) bei seinen Arbeiten zur Quantenmechanik, in denen er die Äquivalenz zeigte zwischen der von Heisenberg (Nobelpreis 1926) entwickelten Matrizenarstellung von Übergangswahrscheinlichkeiten (damals ebenfalls ein Impuls für eine Weiterentwicklung in der Mathematik) und der Wellendarstellung von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten durch Schrödinger (Nobelpreis 1933 mit Paul Dirac).

Die entsprechende Erweiterung erfolgte durch den erst kürzlich verstorbenen französischen, im Elsaß geborenen und aufgewachsenen Mathematiker Laurent Schwartz, der in seiner „Théory des distributions“ 1944 das theoretische Fundament für die „Dirac-Funktion“ schuf, die bis zu diesem Zeitpunkt in den Naturwissenschaften jahrzehntelang mit großem praktischen Erfolg eingesetzt wurde

Bei der Definition der δ -Distribution liegt das Problem nicht allein beim Begriff Funktion! Auch die Integraldefinition nach Riemann mit dem Grenzübergang von $\Delta\tau \rightarrow 0$ der Abszissenunterteilung bei der Ermittlung von Ober- und Untersummen der vertikalen Flächenstreifen unter der Funktion greift nicht mehr, wenn es sich um keine Funktion mehr handelt. Daher war auch ein Erweiterung des Riemann'schen Integralbegriffs durch Lebesgue erforderlich.

Ähnlich ist es mit Sprungfunktionen $k \cdot \sigma(t)$, die zum Sprungzeitpunkt in der klassischen Mathematik nicht differenzierbar sind. Und trotzdem machen differenzierende dynamische System etwas mit solchen Sprüngen.

Die (verallgemeinerte) Ableitung eines Sprungs hängt eng mit der δ -Distribution zusammen und wird hier wegen des Zusammenhangs mit der Beschreibung im Frequenzbereich durch Fourier- und Laplace-Transformation im folgenden plausibel gemacht.

... ein kleiner Bildungsausflug in die Geschichte der Mathematik und der Physik...

2.3.1 Sprungsignal und δ -Distribution

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (34)$$

ist im klassischen Sinn bei $t = 0$ nicht differenzierbar, da dort eine Unstetigkeitsstelle ist. Der Differenzenquotient würde beim Grenzübergang zum Differentialquotient gegen Unendlich wandern. Wenn man allerdings den Eingangssprung $u(t) = u_0 \cdot \sigma(t)$ mit der Amplitude u_0 zunächst durch eine Rampe nach Abb. 25 ersetzt

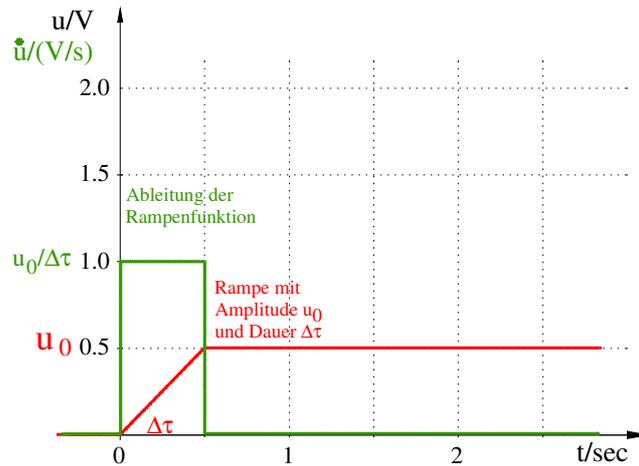


Abb. 25 Rampenfunktion und deren Ableitung

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 \cdot \frac{t}{\Delta\tau} & \text{für } 0 \leq t < \Delta\tau \\ u_0 & \text{für } t \geq \Delta\tau \end{cases} \quad (35)$$

und deren Ableitung bildet, so erhält man eine Impulsfunktion mit der Impulsamplitude $u_0 / \Delta\tau$ und dem Impulsintegral u_0 .

Mit (29) läßt sich die Ableitung der Rampe als Produkt des Einheitsimpulses $\delta_E(t)$ und der Sprungamplitude als Impulsintegral schreiben:

$$\dot{u}_0(t) = u_0 \cdot \delta_E(t) = u_0 \cdot \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau} & \text{für } 0 \leq t < \Delta\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (36)$$

**Zusammenhang
Sprungfunktion und
Impuls**

**„Ableitung“ der
Sprungfunktion**

Halbiert man auch hier wieder fortgesetzt das Zeitintervall $\Delta\tau$ des Anstiegs, so wird für $\Delta\tau \rightarrow 0$ aus Rampe die Sprungfunktion des Signals $u(t)$ mit der Sprungamplitude u_0 , die sich mit dem Symbol $\sigma(t)$ für den Einheitssprung (dimensionsloses Sprungsignal mit Amplitude 1) darstellen läßt:

$$u_0(t) = u_0 \cdot \sigma(t) = u_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \Delta\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (37)$$

Aus der Ableitung der Rampe wird dabei ein Impuls mit dem konstanten Impulsintegral u_0 , während die Impulsamplitude über alle Schranken wächst. Die „Ableitung“ läßt sich also auch hier wieder als Produkt der δ -Distribution mit dem Impulsintegral darstellen. Da die „Ableitung“ eines Sprunges nicht mehr über den Grenzwert des Differenzenquotienten ermittelt werden kann, sondern als obere Schranke einer Funktionenfolge zustande kommt, spricht man von „verallgemeinerter Ableitung“ oder der „Derivierten“ der Sprungfunktion. (lateinisch: derivare = ableiten):

„Verallgemeinerte Ableitung“ („Derivierte“) einer Sprungfunktion ist die Delta-Distribution

$$\dot{u}(t) = u_0 \cdot \dot{\sigma}(t) = u_0 \cdot \delta(t) = u_0 \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 & \end{cases} \quad (38)$$

Die Delta-Distribution $\delta(t)$ ist also die Derivierte des Einheitssprungs $\sigma(t)$

2.3.2 δ -Distributionen und erzeugende Funktionen

Die δ -Distribution wurde in 2.3 aus einer Funktionenfolge von Rechteckimpulsen mit der konstanten Fläche 1 erzeugt. Diese Funktion ist aber nicht die einzige, die zur δ -Distribution führt. Auch ein Dreieckfunktion mit der Fläche 1, die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion und andere Funktionen, wie z.B. $\frac{a}{a^2 + x^2}$

können als Ausgangspunkt für die Erzeugung der δ -Distribution verwendet werden. Davon wird auch später Gebrauch gemacht.

Dies hat gerade in der Physik einen plausiblen Hintergrund: Wenn man ein dynamisches System mit einem Impuls anregt, ist es ohne Bedeutung, welche Form der (endliche) Impuls hat, wenn er nur deutlich kürzer ist, als die dominierenden Zeitkonstanten des dynamischen Systems. Wenn man etwa die Stoßdämpfer eines Autos prüft, kann man mit dem „Hau-den-Lukas“-Hammer auf die Stoßstange einen sehr kurzen, kräftigen Impuls ausüben oder etwas länger, aber dafür nicht mit derselben hohen Amplitude, mit dem eigenen Gewicht kurz auf die Stoßstange eine Kraft ausüben. Solange die Fläche unter dem Kraftverlauf in beiden Fällen gleich ist (und die Stoßstange die Mißhandlung durch den Hammer aushält), wird das Auto dieselbe abklingende Schwingungsbewegung machen.

Delta-Distribution als verallgemeinert Grenzwert einer Funktionenfolge

2.4 Der Faltungssatz für kontinuierliche Systeme

2.4.1 Darstellung eines beliebiges Eingangssignals $u(t)$ als Summe von Impulsen

Wegen der Linearität der betrachteten Systeme bietet es sich an, ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ zu zerlegen in eine Summe aus Impulsen mit der Amplitude $u(\tau_i)$ und der Breite $\Delta\tau$ (Abb. 20), diese Impulse auf das lineare System zu geben und anschließend die Impulsantworten zu addieren:

Die Funktion $u^*(t)$ nähert die ursprüngliche kontinuierliche Funktion $u(t)$ durch

eine Treppe an. Dabei werden die einzelnen Impulsintegrale $u(\tau_i) \cdot \Delta\tau$ zwischen den Zeitpunkten τ_i und τ_{i+1} , multipliziert mit dem um τ_i verschobenen Ein-

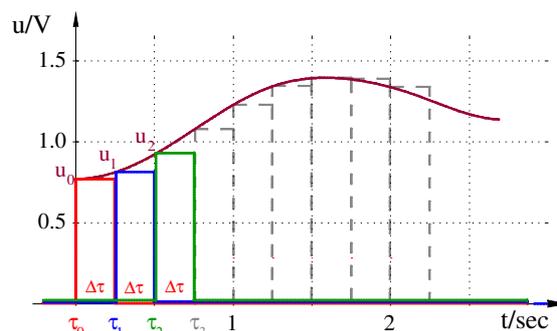


Abb. 26 Zerlegung des kontinuierlichen Signals $u(t)$ in Impulse der Dauer $\Delta\tau$

Kontinuierlicher Faltungssatz

Diskretisierter Fal-
tungssatz

heitsimpulsen δ_E nach (29), über die Anzahl der im Intervall von 0 bis t liegenden Impulse aufsummiert:

$$u^*(t) = \sum_{i=0}^n \delta_E(t - \tau_i) \cdot u(\tau_i) \Delta\tau \quad (39)$$

Die obere Summengrenze n ist dabei der ganzzahlige Anteil des Quotienten $t / \Delta\tau$.

In **Abb. 26** sind die ersten 3 Impulse farbig hervorgehoben. Zu den Zeitpunkten $t = \tau_i = i \cdot \Delta\tau$ stimmt die Treppennäherung exakt mit dem kontinuierlichen Eingangssignal $u(t)$ überein.

2.4.2 Reaktion des Systems auf die Summe der Impulse - Faltungssatz für analoge Systeme

Die Antwort es dynamischen Systems auf den Einheitsimpuls $\delta_E(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Fläche 1 ist die Normimpulsantwort $g(t)$, die nach Multiplikation mit dem Impulsintegral $u(\tau_i) \cdot \Delta\tau$ (siehe (31)) die (Amplituden-)Impulsantwort $x_1(t)$ liefert. Wegen der Linearität des Übertragungssystems ergibt die Summation aller Impulsantworten $u(\tau_i) \cdot \Delta\tau \cdot g(t - \tau_i)$ bis zum betrachteten Zeitpunkt t den dortigen Wert des Ausgangssignals:

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^n x_I(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^n g(t - \tau_i) \cdot u(\tau_i) \cdot \Delta\tau \quad (40)$$

Wegen der Kausalität (g kann nicht früher beginnen als der zugehörige Eingangs-Impuls) kann man auch n gegen Unendlich gehen lassen, ohne daß sich die Summe ändert. Bei nicht kausalen Systemen (siehe später beim Faltungssatz im Frequenzbereich, wenn f die unabhängige Variable ist sowie G und U von f abhängen) beeinflussen gerade auch Anteile für $f < 0$ das Ausgangssignal, das dort dann $F(f)$ ist.

Zeitliche Antwort
eines linearen dyna-
mischen Systems
auf eine Eingangs-
funktion läßt sich
zusammensetzen
aus der Summe der
gewichteten Impuls-
Amplitudenantwor-
ten des Systems

Man erhält also zum Zeitpunkt t das Ausgangssignal eines linearen dynamischen Systems mit der Impulsantwort $g(t)$ dadurch, daß man das Eingangssignal $u(t)$ bis zum Zeitpunkt t in Impulse mit der Breite $\Delta\tau$ und der Amplitude $u(\tau_i)$ zerlegt und die Augenblickswerte der Antworten auf diese Impulse beim Zeitpunkt t addiert (Abb. 27).

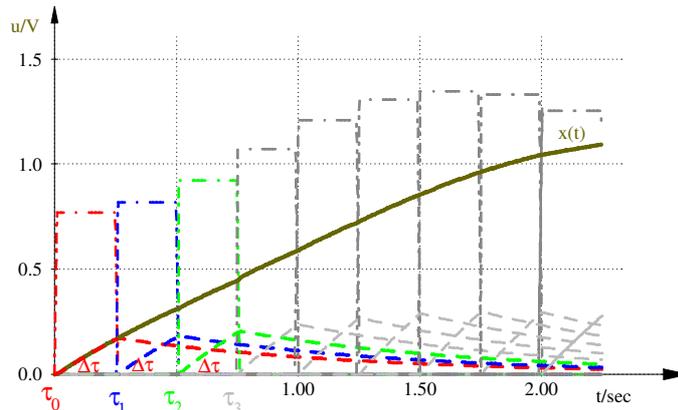


Abb. 27 Ausgangssignal $x(t)$ als Überlagerung der Impulsantworten (*transv_tp3.dwk*)

Beispiel eines diskretisierten Tiefpasses erster Ordnung

Läßt man $\Delta\tau$ gegen Null gehen, so wird aus der Summe (40) das

$$\text{Faltungsintegral: } x(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (41)$$

2.4.3 Laplace- und Fouriertransformierte des Ausgangssignals $x(t)$

Bei der Betrachtung im Frequenzbereich sind wir gewohnt, die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines linearen Systems mit der komplexen Amplitude $U(s)$ des Eingangssignals zu multiplizieren, um daraus die komplexe Amplitude $X(s)$ des Ausgangssignals zu erhalten. Dem liegt die in der Laplace- und Fouriertransformation begründete Vorstellung zugrunde, daß sich jedes Signal, das endliche Energie oder wenigstens endliche Leistung aufweist, aus der Überlagerung von Sinusschwingungen zusammensetzen läßt.

Wie alle energie- und leistungsbegrenzten Signale, die in der Praxis vorkommen, besitzt auch das Ausgangssignal $x(t)$ des linearen, zeitinvarianten Systems („LTI-System“) eine Laplace- und Fouriertransformierte. Mit den folgenden Zusammenhängen werden wir verstehen, daß die Faltung im Zeitbereich äquivalent zur Multiplikation im Frequenzbereich ist

Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich ist äquivalent zur Multiplikation ihrer Laplace-transformierten im Frequenzbereich

Mit der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (42)$$

ergibt sich für das mit (41) aus der Faltung $x(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$ entstandene

Signal $x(t)$ als Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \right] \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (43)$$

Durch die Koordinatentransformation

$$y = t - \tau \quad \text{und} \quad dy = dt \quad (44)$$

wird die Normimpulsantwort $g(t - \tau) \rightarrow g(y)$ unabhängig von τ und kann außerhalb des Faltungsintegrals geschrieben werden.

Andererseits ist nun die Exponentialfunktion

$$e^{-s \cdot t} = e^{s \cdot (y + \tau)} = e^{s \cdot y} \cdot e^{s \cdot \tau} \quad (45)$$

abhängig von τ , so daß der Faktor $e^{s \cdot \tau}$ in das innere Integral wandert:

$$X(s) = \int_{y=-\tau}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} \cdot d\tau \right] \cdot g(y) \cdot e^{-s \cdot y} \cdot dy \quad (46)$$

Das gesamte innere Integral über $d\tau$ ist für das äußere Integral über dy eine Konstante, so daß es als Faktor vor (oder hinter) das Integral gezogen werden kann. Da die Impulsantwort g für negative Argumente Null ist, kann zudem die untere Grenze des Integrals über dy wieder Null gesetzt werden:

$$X(s) = \left[\int_{y=0}^{\infty} g(y) \cdot e^{-s \cdot y} \cdot dy \right] \cdot \left[\int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} \cdot d\tau \right] \quad (47)$$

Damit steht als Ergebnis im Frequenzbereich das Produkt der Spektren des Eingangssignals $X(S)$ und der Normimpulsantwort $G(s)$:

$$X(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (48)$$

$G(s)$ ist bekannt als Übertragungsfunktion des betrachteten linearen dynamischen Systems

Zusammenfassend läßt sich also festhalten:

1. Die **Faltung** zweier Signale **im Zeitbereich** ist äquivalent zur **Multiplikation** der zugehörigen **Laplace-Transformierten**
2. Ist eines der beiden Signale im **Zeitbereich** die **Normimpulsantwort** des linearen Übertragungsgliedes, dann ist deren **Laplace-Transformierte** die **Übertragungsfunktion** des linearen Systems.

Die Laplace-Transformierte des Ausgangssignals ergibt sich aus dem Produkt der Übertragungsfunktion mit der Laplace-Transformierten des Eingangssignals

Spezialfall:
Eingangssignal ist der Normimpuls mit Fläche 1

→

Laplace-Transformierte der Übertragungsfunktion ist die Normimpulsantwort

Betrachtet man die obigen Zusammenhänge für technisch-physikalische Frequenzen $s = j \cdot \omega = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$, so erhält man die Fouriertransformierte $X(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$ des Ausgangssignals des linearen Übertragungsgliedes mit dem komplexen Frequenzgang $G(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$ und dem Eingangssignal mit der komplexen Amplitude $U(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)$:

$$X(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) = G(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot U(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \quad (49)$$

Für den Tiefpaß aus Kap. 1.2.1 mit der Übertragungsfunktion (1) ergibt sich der Frequenzgang

$$G_{ATP}(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C + 1} \quad (50)$$

Der Betrag $|G(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)|$ ist in Abb. 6 und Abb. 7 die sichtbare Schnittkurve der $|G| - j\omega$ -Ebene mit dem Gebirge des Betrags $|G(s)| = |G(\sigma + j\omega)| = |G(\sigma + j2\pi f)|$ der Übertragungsfunktion $G(s)$. In doppelt logarithmischer Darstellung ergibt diese Schnittkurve den Amplitudengang des Bodediagramms in **Abb. 8**.

Will man nicht nur das Verhältnis Ausgangs- zu Eingangsamplitude

$$\frac{\hat{x}}{\hat{u}} = |G(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)| \quad (51)$$

darstellen, sondern auch im selben Diagramm zusätzlich noch die Phasenverschiebung

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_u = \text{arc}(G(j2\pi f)), \quad (52)$$

so kann man für alle Frequenzen f von Null bis Unendlich den geometrischen Ort für die Spitze des Zeigers darstellen, der zur komplexen Zahl $G(j2\pi f)$ gehört. Dieser geometrische Ort ist die Ortskurve des Frequenzgangs. Für den obigen Tiefpaß ergibt sich ein Halbkreis unterhalb der reellen Achse mit Radius 0.5, der für $f = 0$ bei $G = 1$ beginnt und für $f \rightarrow \infty$ bei $G = 0$ endet

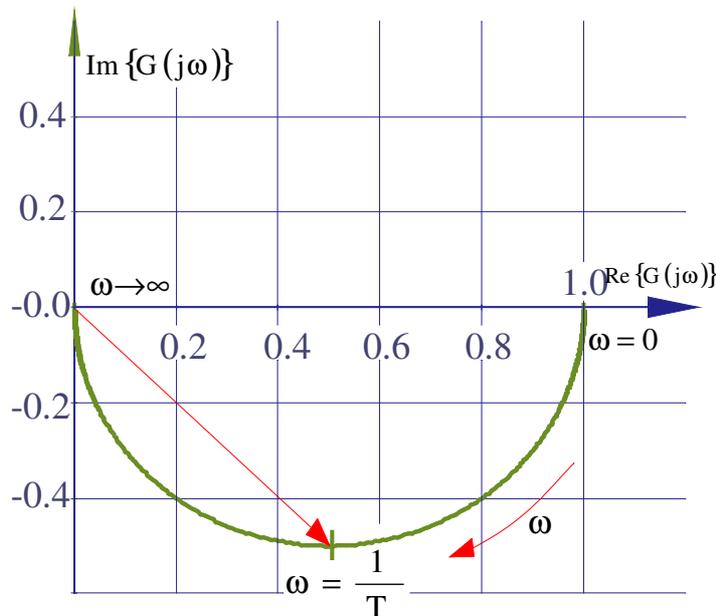


Abb. 28 Tiefpaß 1. Ordnung, Ortskurve des Frequenzgangs

Ortskurve des Frequenzgangs beinhaltet Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingang eines linearen dynamischen Systems.

Für $f = 1/2\pi T = f_g$ hat der Zeiger mit $1/\sqrt{2}$ die Länge der Diagonalen eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen $1/2$. Die Ausgangsamplitude des linearen Systems ist also bei der Grenzfrequenz um $20 \cdot \lg \sqrt{2} = 3.0\text{dB}$ abgefallen. Das Ausgangssignal eilt bei dieser Frequenz dem Eingangssignal um 45° hinterher, da der zugehörige Zeiger $G(j2\pi f_g)$ diesen Winkel mit der reellen Achse einschließt.

2.5 Faltungssatz für digitale Signale

In 2.4.1 wurde lediglich das kontinuierliche Eingangssignal durch eine Treppenfunktion ersetzt, während das dynamische System analog war und durch lineare Differentialgleichungen beschrieben wurde. Die Antwort auf das treppenförmige Eingangssignal ist die Überlagerung der Antworten auf die Impulse endlicher Breite, aus denen man sich die Treppe zusammengesetzt denken kann. Durch immer feinere Unterteilung der Treppe, die auch zur Notwendigkeit für die δ -Distribution wurde schließlich daraus wieder das analoge Signal und die Faltungssumme (40) ging in das Faltungsintegral (41) über.

Nun soll auch das dynamische System digital sein, also durch Differenzgleichungen beschrieben werden. Für dieses digitale System soll ein digitaler Faltungssatz hergeleitet werden, der ganz analog zum kontinuierlichen System das Eingangssignal u mit dem Ausgangssignal x über die digitale Impulsantwort verbindet. Für immer kleinere Abtastintervalle soll schließlich das digitale in das analoge System übergehen.

Zur Herleitung betrachten wir die Antworten auf einen Impuls mit der Fläche 1 auf einen analogen und einen dazu äquivalenten digitalen Tiefpaß. Die Eingangssignale sind also die Dirac'sche Deltadistribution $\delta(t)$ (33) auf das analoge und der digitale Normimpuls $\delta_E(t)$ (29) auf das digitale System.

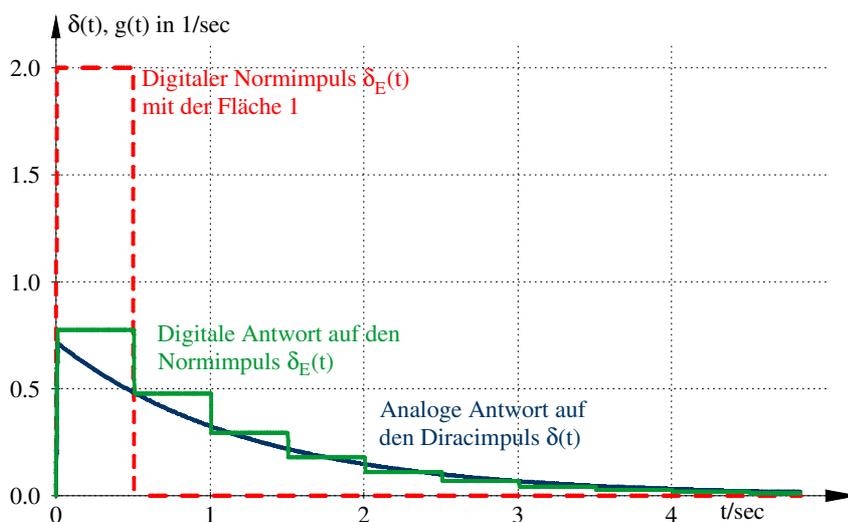


Abb. 29 Antworten des digitalen und des analogen Tiefpasses auf einen Impuls mit der Fläche 1

Von der diskretisierten kontinuierlichen Faltung....

bis zur diskreten Faltung

Wie in Abb. 28 zu sehen ist, verlaufen die digitale und die analoge Antwort auf einen Impuls mit der Fläche 1 sehr ähnlich. Das digitale Ausgangssignal ergibt sich dabei aus der Differenzgleichung in der Form

$$x_i = a_1 \cdot x_{i-1} + \dots + a_k \cdot x_{i-k} + b_0 \cdot u_i + \dots + b_m \cdot u_{i-m} \quad (53)$$

Aufgabe 7	<ul style="list-style-type: none"> - Ermitteln Sie allgemein aus der Differenzgleichung (53) die z-Übertragungsfunktionen des digitalen Systems. Nehmen Sie dazu den rekursiven Tiefpaß 1. Ordnung, Gleichung (6), die Erläuterungen in Kap. 1.2.4.2 sowie Abb. 6 und Abb. 11 zu Hilfe. - Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieses Systems für $n = 3$ und $m = 2$
------------------	---

Wählt man als Eingangssignal den Normimpuls $\delta_E(t)$ mit der Impulsamplitude $1/\Delta\tau$ und der Breite $\Delta\tau$, so erhält man mit (53) die Normimpulsantwort $g(n \cdot \Delta\tau) = g_n$, bei der jeder Term die Amplitude $1/\Delta\tau$ des Normimpulses als Faktor aufweist. Zieht man diesen Faktor vor die Summe, so läßt sich die Normimpulsantwort auch als Produkt der Amplitude $1/\Delta\tau$ mit der Antwort g_I auf einen Impuls mit der Amplitude 1 („Einsimpuls“) und der Dauer $\Delta\tau$ darstellen:

$$g(t) = \frac{1}{\Delta\tau} \cdot g_I(t) \quad (54)$$

Einsetzen in die zur Herleitung des analogen Faltungssatzes aufgestellte Faltungssumme in (40) führt auf

Diskrete Faltung

$$x(t_n) = \sum_{i=0}^n g(t - \tau_i) \cdot u(\tau_i) \cdot \Delta\tau = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\Delta\tau} \cdot g_I(t - \tau_i) \cdot u(\tau_i) \cdot \Delta\tau \quad (55)$$

$\Delta\tau$ kürzt sich hierbei heraus. Da im Gegensatz zu kontinuierlichen Funktionen kein Grenzübergang $\Delta\tau \rightarrow 0$ nötig ist, kann auf die aufwendige Konstruktion einer Distribution mit dem Integral 1 verzichtet werden. Damit wird nun die **Amplitude**

$u(\tau_i)$ des digitalisierten Zeitsignals mit der digitalen Antwort des Systems auf einen **Impuls** $\delta_I(i \cdot \Delta\tau) = \delta_{I_i}$ mit der **Amplitude 1** multipliziert.

$$\delta_I(i \cdot \Delta\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \Delta\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{I_i} \quad (56)$$

Zur Unterscheidung vom *Normimpuls* mit der *Fläche 1* wird er im folgenden als „**Eins-Impuls**“ bezeichnet.

Die einzelnen Eins-Impulsantworten $g_{I_{n-i}}$ werden bis zum Abtastzeitpunkt n aufaddiert und ergeben den Wert des Ausgangssignals an diesem Zeitpunkt:

$$\text{Diskrete Faltung: } x_n = \sum_{i=0}^n g_{I_{n-i}} \cdot u_i \quad (57)$$

In der diskreten Faltung ist die komplizierte Konstruktion der Deltadistribution unnötig

2.6 Digitale Filter auf der Basis des Faltungssatzes

Wie für analoge Signale gilt auch für digitale, daß sich das gefilterte Signal aus der Summe der mit dem Eingangssignal gewichteten Impulsantworten darstellen läßt, also das Eingangssignal u mit der Impulsantwort g_I nach (57) gefaltet wird. Mit dem Rechner läßt sich diese Operation dadurch darstellen, daß man das Eingangssignale über eine Kette von Speichern schickt, die das Eingangssignal jeweils um ein Abtastintervall $\Delta\tau$ verzögern. Das aktuelle Eingangssignal u_n zum Zeitpunkt $t = t_n = n \cdot \Delta\tau$ und alle um $i \cdot \Delta\tau$ zurückliegenden Eingangssignale $u_{n-i} = u(t_n - i \cdot \Delta\tau)$ werden mit den Koeffizienten $g_i = g(i \cdot \Delta\tau)$ multipliziert und die Ergebnisse aufsummiert (Abb. 30).

Diskrete Faltung führt auf eigene Klasse von Digitalfiltern:

Nichtrekursive Filter, auch Transversalfilter wegen ihrer Struktur genannt

Mit einer Verzögerungskette und geeigneten Gewichten wird die Impulsantwort des Filters gebildet

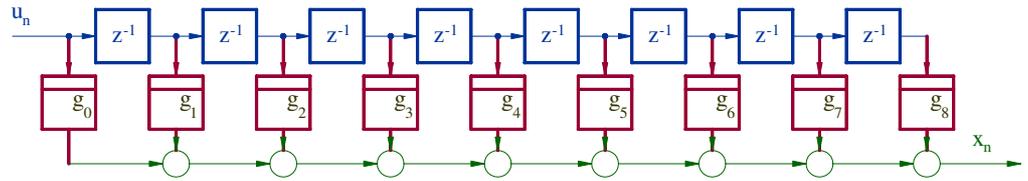


Abb. 30 Mit der Impulsantwort gewichtete Verzögerungskette als Digitalfilter mit endlicher Impulsantwort FIR

Statt des in der Regelungstechnik üblichen Blockes als P-Glied wird bei der Darstellung digitaler Filter in der Regel der Block für das P-Glied weggelassen und lediglich der Multiplikator g_i an die Signalleitung geschrieben.

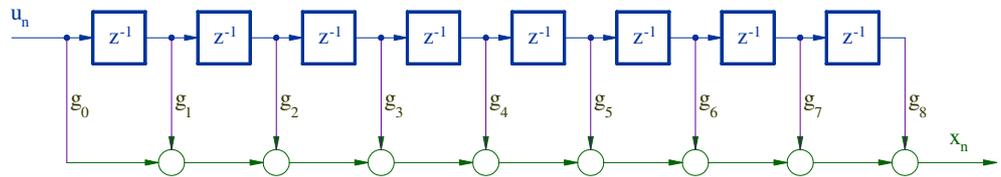


Abb. 31 Darstellung des FIR-Filters mit gewichteten Signalleitungen

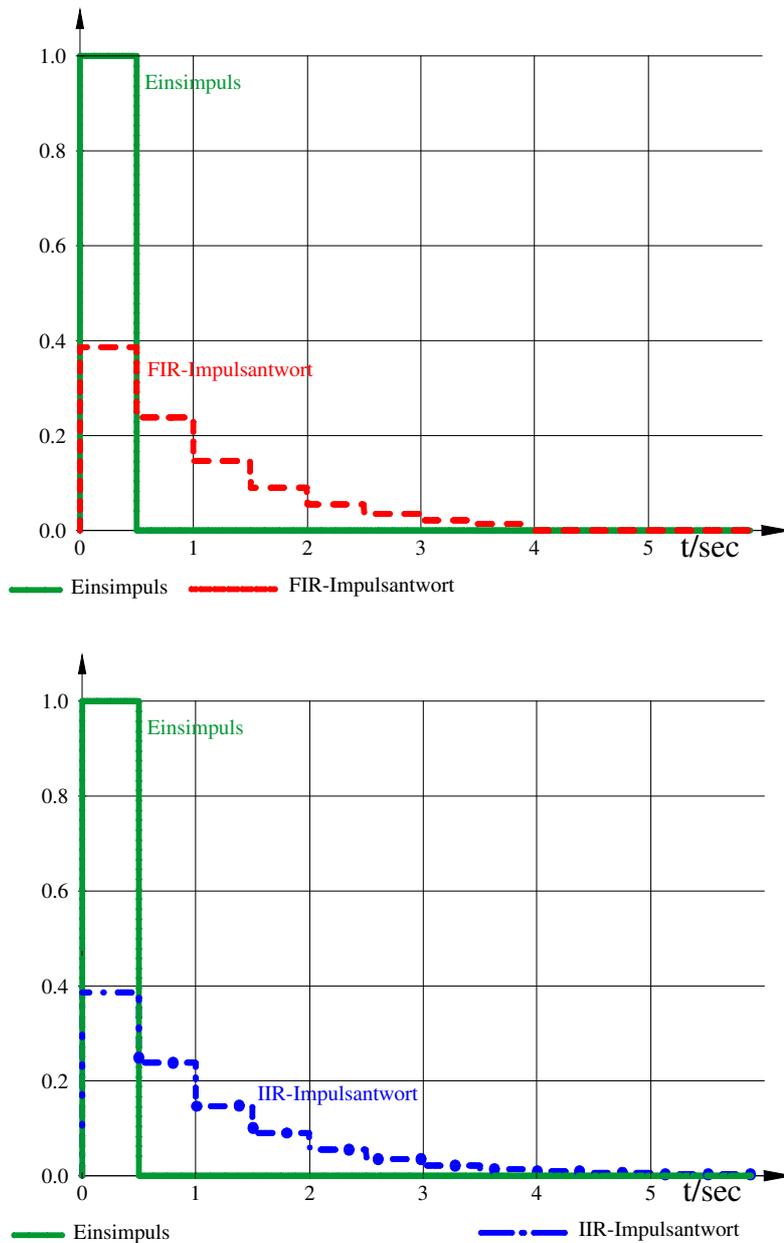
Für den Fall einer unendlich langen Speicherkette würde diese Impulsantwort mit der des rekursiven Filters exakt übereinstimmen. Da aber die Impulsantworten von Filtern in der Regeln für zunehmende Zeit immer kleinere Amplituden aufweisen, ist die Abweichung zwischen der unendlich langen Impulsantwort eines (rekursiven) IIR-Filters und der endlich langen des (nichtrekursiven) FIR-Filters nur gering. Diese Zusammenhänge werden im folgenden am mittlerweile gut bekannten Tiefpaß mit 3-dB-Grenzfrequenz bei 0.2 Hz veranschaulicht.

2.6.1 Eins-Impulsantwort des FIR-Tiefpasses mit Grenzfrequenz 0.2Hz

Eins-Impulsantwort eines rekursiven Filters und nichtrekursiven Filters unterscheiden sich am Anfang der Impulsantwort nicht

Der FIR-Tiefpaß, der aus dem analogen Tiefpaß mit Grenzfrequenz 0.2Hz (ohne Korrektur nach (21)) hervorgeht, ist mit einer Kette aus 8 Verzögerungsspeichern aufgebaut. Seine Impulsantwort, die sich aus 9 gewichteten Signalwerten zusammensetzt, endet damit nach 8 Schritten.

Wie man der folgenden Abb. 32 entnehmen kann, unterscheiden sich aber die Impulsantworten des FIR-Tiefpasses (links) und des IIR-Tiefpasses nach dem 8. Schritt nur geringfügig, da die Impulsantwort auf vernachlässigbar kleine Werte abgesunken ist..



Die FIR-Impulsantwort bricht lediglich nach einer endlichen Anzahl mit der Impulsantwort ab.

Abb. 32 Eins-Impulsantworten des FIR- und des IIR-Tiefpasses

Für den Entwurf digitaler Filter gibt es unterschiedliche Methoden. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die Koeffizienten des FIR-Tiefpasses aus der Impulsantwort des bereits bekannten rekursiven Tiefpasses zu gewinnen.

Die Differenzgleichung des rekursiven Tiefpasses lautet nach (7)

$$x_i = K \cdot x_{i-1} + L \cdot u_i \text{ mit}$$

$$K = \frac{T}{T + \Delta\tau} \quad \text{und} \quad L = \frac{\Delta\tau}{T + \Delta\tau} = 1 - K .$$

Sehr einfache Methode zum Entwurf eines einfachen Digitalfilters

Berechnung der Koeffizienten des FIR-Filters

Die Koeffizienten g_i der Impulsantwort ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 g_0 &= L \cdot 1 && = K^0 \cdot L \cdot 1 \\
 g_1 &= K \cdot g_0 + L \cdot 0 && = K^1 \cdot L \cdot 1 \\
 g_2 &= K \cdot g_1 + L \cdot 0 && = K^2 \cdot L \cdot 1 \\
 &\dots && \\
 g_n &= K \cdot g_{n-1} + L \cdot 0 && = K^n \cdot L \cdot 1
 \end{aligned} \tag{58}$$

Beispiel Tiefpaß erster Ordnung: FIR-Impulsantwort durch Abbruch der Impulsantwort des IIR-Filters

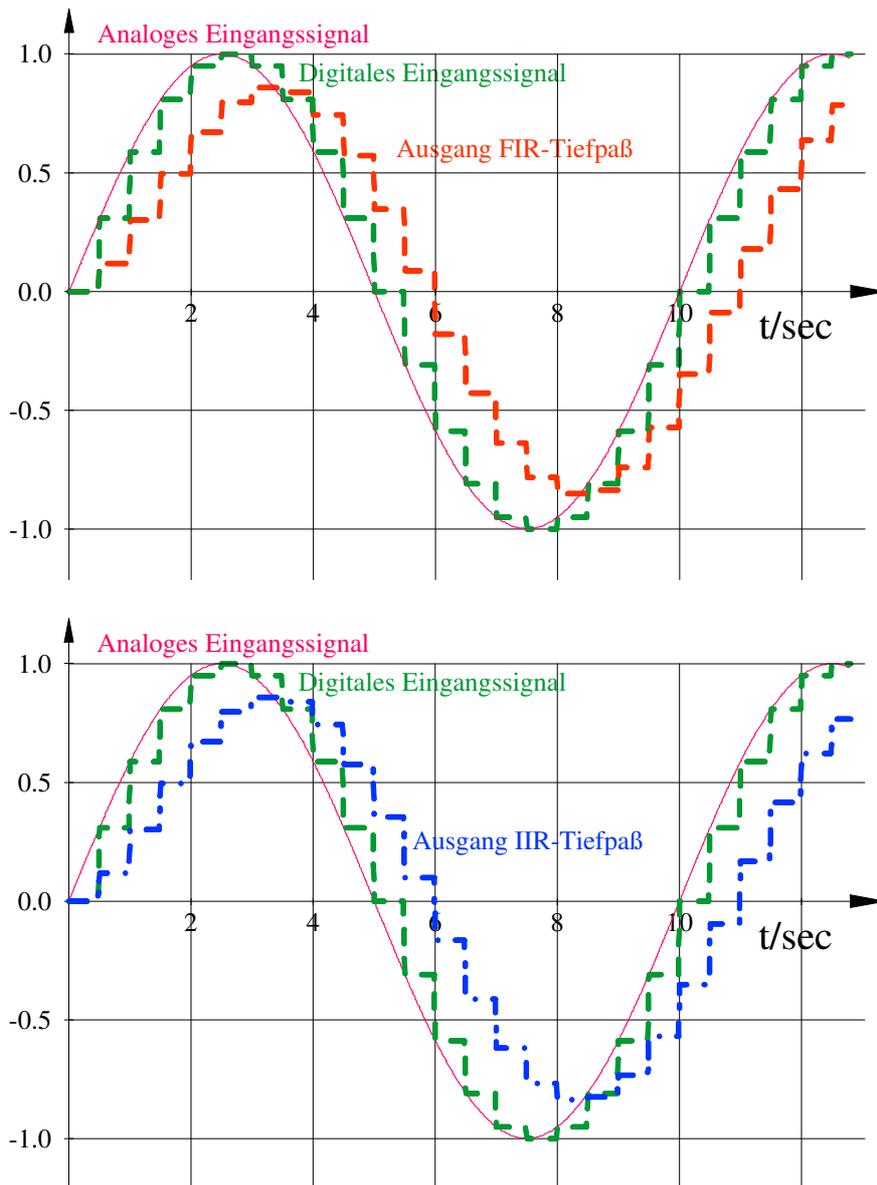
Für den Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $f_g = 0.2\text{Hz}$ und dem Abtastintervall $\Delta\tau = 0.5\text{sec}$ haben die Koeffizienten K und L die Werte $K = 0.61413$ und $L = 0.38587$. Damit lautet der Gewichtsvektor \vec{g} der Impulsantwort

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0.3859 \\ 0.2370 \\ 0.1455 \\ 0.0894 \\ 0.0549 \\ 0.0337 \\ 0.0207 \\ 0.0127 \\ 0.0078 \end{pmatrix} \tag{59}$$

Der Koeffizient g_8 hat also nur noch 2% des dominierenden Koeffizienten g_0 . Dies rechtfertigt einen Abbruch nach dem 9. Koeffizienten, so daß die Impulsantwort hier enden kann. Dies ist auch in Abb. 32 deutlich zu sehen. Für ein beliebiges Zeitsignal innerhalb der Gültigkeit des Abtasttheorems sind also zwischen rekursivem und nichtrekursivem Filter keine gravierenden Unterschiede zu erwarten.

2.6.2 Filterung einer Sinusschwingung bei der halben Tiefpaß-Grenzfrequenz

Wie bereits in Kap. 1.2.5.1 wird ein sinusförmiges Signal auf den Eingang des rekursiven Tiefpasses geführt und im Vergleich dazu auf das nichtrekursive Filter mit 8 Verzögerungsspeichern.



Vergleich einer Filterung mit FIR- und IIR-filter

Abb. 33 FIR- und IIR-Tiefpaß im Vergleich bei Anregung durch ein sinusförmiges Signal bei halber Grenzfrequenz

Auf den ersten Blick ist kein Unterschied feststellbar. Erst wenn man die beiden Ausgangssignale übereinander legt, treten minimale Unterschiede zutage.

**Abwägung zwischen
Entwurf als FIR-
oder IIR-Filter**

2.7 Rekursive und nichtrekursive Digitalfilter – Gegenüberstellung

Gegenüber den rekursiven Filtern sticht sofort ins Auge, daß der Aufwand an Verzögerungsspeichern beim FIR-Filter deutlich höher ist, als bei einem rekursiven IIR-Filter. Dies ist auch nachteilig für die Rechenzeit. Dem steht der Vorteil der absoluten Stabilität des Transversalfilters gegenüber, da keine Rückkopplungen vom Ausgang auf den Eingang vorhanden sind.

Ein weiterer Vorteil des Transversalfilters ist eine Eigenschaft, die hier nicht behandelt wurde. Allein mit dem FIR-Filter läßt sich ein streng linearer Phasengang realisieren, also eine zur Frequenz proportionale Phasenverschiebung. Dies ist insbesondere bei der Übertragung von Datensignalen von Vorteil, da durch diese Eigenschaft die Signalform nicht verzerrt wird.

Ob man sich beim Filterentwurf für ein IIR- oder ein FIR-Filter entscheidet, hängt damit sehr von der konkreten Aufgabenstellung ab und läßt sich nicht allgemein beantworten.

3 **Fourieranalyse und Fouriertransformation**

Die Fourieranalyse und die daraus ableitbare Fouriertransformation gehören zu den mächtigsten Werkzeugen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich und in den Ingenieurwissenschaften.

Um diese Methoden zielgerichtet anwenden zu können reicht eine Kenntnis von Anwendungsrezepten zur Bedienung fertiger Programme nicht aus. Vielmehr müssen die mathematischen Zusammenhänge zum „geistigen Handwerkszeug“ werden. Dies ist angesichts der Anschaulichkeit dieses Gebiets, das der Funktionentheorie zugehört, viel leichter möglich, als es dürre mathematische Beziehungen erahnen lassen.

In den folgenden Kapiteln wird für periodische Funktionen die Ermittlung der Koeffizienten c_i der komplexen Fourierreihe veranschaulicht. Die komplexe Fourierreihe kann man sich als unendliche Summe aus Zeigern mit unterschiedlicher Länge c_i vorstellen, die sich mit dem i -fachen der Grundfrequenz der periodischen Funktion (Periode T) nach links bei positivem Index i bzw. nach rechts im Uhrzeigersinn bei negativem Index i drehen. Trägt man die Längen der Zeiger über der Frequenz f an den Stellen $f_i = i/T$ (evtl. getrennt nach Real- und Imaginärteil oder auch dreidimensional („Rettichfunktion“) mit Realteil nach hinten und Imaginärteil nach oben) auf, so erhält man ein Linienspektrum, das Auskunft über die spektrale Zusammensetzung des periodischen Signals gibt.

In einem weiteren Schritt wird diese Periode T gegen Unendlich ausgedehnt, ohne die Form der Zeitfunktion zu ändern, so daß mit dieser Maßnahme nichtperiodische, energiebegrenzte Zeitsignale, wie etwa

$x(t) = e^{-\omega_g \cdot |t|}$ für $-\infty < t < +\infty$, in den Frequenzbereich übergeführt werden können. Die daraus entstehende Funktion ist kein Linienspektrum mehr, sondern ist kontinuierlich und heißt Fouriertransformierte $\mathcal{F}(x(t))$ der Zeitfunktion $x(t)$.

Eine Erweiterung auf lediglich leistungsbegrenzte Signale, wie etwa $x(t) = 1$ oder $x(t) = \cos(\omega_0 \cdot t)$ für $-\infty < t < +\infty$ läßt mit Hilfe der mittlerweile bekannten und (hoffentlich) verstandenen Dirac'schen δ -Distribution auch eine Fouriertransformation solcher Signale zu. Dies wird insbesondere bei der Abtastung periodischer Funktionen mit anschließendem Halten über ein Abtastintervall t_{abt} („Abtast-Halte-Glied“) von großer Bedeutung sein. Diese Darstellung modelliert das tatsächliche Verfahren im Rechner, bei dem einer kontinuierlichen Zahlenfolge im Abstand t_{abt} Werte entnommen und über dieses Intervall gespeichert werden. Die mathematische Behandlung im Zeit- und im Frequenzbereich wird durch die Darstellung mit einer δ -Impulsreihe bedeutend einfacher, als wenn man mit Zahlenfolgen operieren müßte und liefert dieselben Ergebnisse.

In der Realität wird einem Signal nur eine zeitlich begrenzte Probe an Werten entnommen. Für das Ergebnis der Fouriertransformation ist es dabei von Bedeutung, wie die Signalwerte zu Beginn und zu Ende dieses Zeitfensters bewertet werden. Gehen alle Werte der Zeitfunktion innerhalb dieses Zeitfensters mit demselben Gewicht ein, so spricht man von einem Rechteckfenster. (Sie werden sich gleich im nächsten Kapitel mit den Eigenschaften so einer Rechteckfunktion beschäftigen). Bewertet man die Proben anders – hier gibt es Bewertungsvorschläge, die man nach ihren Autoren „Kaiser-Fenster“, „Henning-Fenster“ oder nach ihren Bewertungsfunktionen wie z.B. „Rechteck-Fenster“ oder „Bessel-Fenster“ bezeichnet –, so hat diese Maßnahme deutlichen Einfluß auf die Gestalt des Spektrums. Durch gezieltes Einsetzen solcher Fensterfunktionen kann man gesuchte Eigenschaften des Signals deutlicher hervortreten lassen.

Bei den folgenden Herleitungen wurde aus didaktischen Gründen bewußt auf Hinweise für notwendige mathematischen Voraussetzungen verzichtet. So wird nicht ausdrücklich etwa auf die Existenz oder Konvergenz von Integralen hingewiesen, um die Lesbarkeit und damit die Verständlichkeit nicht zu beeinträchtigen. Sobald sich das „Gebäude Fouriertransformation“ im Gedächtnis gefestigt hat, kann dies bei Interesse mit Hilfe der angegebenen Literatur nachgeholt und so die Breite des Fundaments des eigenen Wissens und Könnens nach Belieben verbreitert werden.

3.1 Fourieranalyse einer periodischen Zeitfunktion $x(t)$

Jede Kosinusfunktion $\cos \omega t$ läßt sich durch zwei gegenläufig rotierende Zeiger darstellen (Abb. 34):

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \cdot (e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (60)$$

Analog gilt für die Sinusfunktion:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} \cdot (e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (61)$$

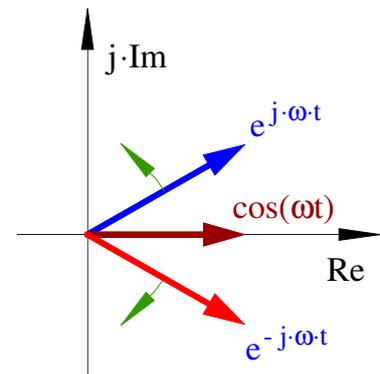


Abb. 34 Kosinusschwingung

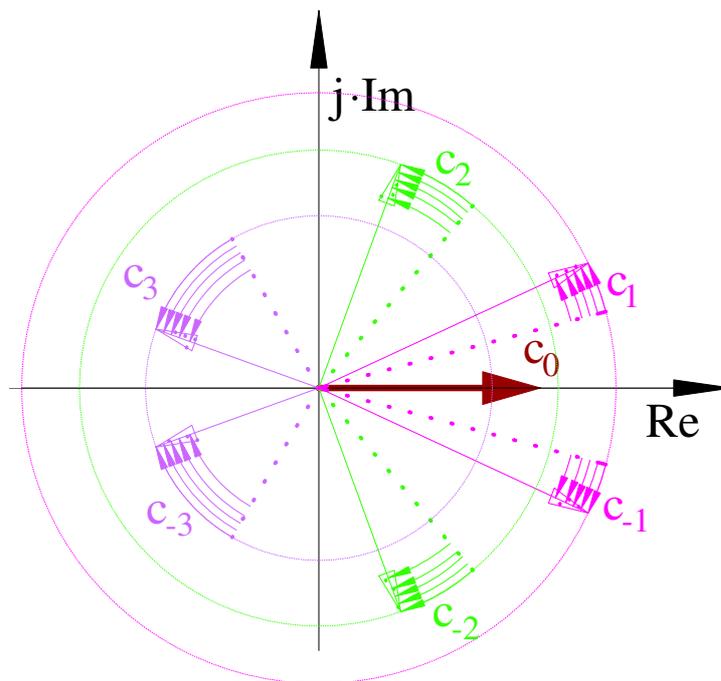
Bei der Darstellung einer reellen periodischen Zeitfunktion $x(t)$ mit der Periode $T = 2\pi/\omega_0$ nach Fourier durch eine unendliche Summe von Sinus- und Kosinusschwingungen mit ganzzahligem Vielfachen der Grundperiode ω_0 kann man durch geeignete Zusammenfassung von Sinus- und Kosinusgliedern auch als unendliche Summe rotierender Zeiger darstellen:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{i \rightarrow -\infty}^{i \rightarrow +\infty} c_i \cdot e^{j i \omega_0 t} \\
 &= \sum_{i \rightarrow -\infty}^{i=-1} c_i \cdot e^{j i \omega_0 t} + c_0 + \sum_{i=+1}^{i \rightarrow +\infty} c_i \cdot e^{j i \omega_0 t}
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Der linke Summenterm beinhaltet wegen $i < 0$ alle Zeiger, die sich im Uhrzeigersinn drehen, der rechte alle Zeiger, die im mathematisch positiven Drehsinn entgegen dem Uhrzeiger rotieren. Lediglich der Zeiger mit der Amplitude c_0 bleibt stehen.

Betrachtet man dieses „Multikarussell“ aus unterschiedlich schnell rotierenden Zeigern, so sieht man diesen ruhenden Zeiger, während alle anderen für das Auge fast unsichtbar zu rotierenden Kreisscheiben verwischen.

Abb. 35 zeigt eine Momentaufnahme dieses „Multikarussells“, mit einer „Belichtungszeit“ $T/36$. Die beiden Zeiger c_1 und c_{-1} überstreichen in dieser Zeit gerade mal 10° , die beiden Zeiger c_2 und c_{-2} mit der Frequenz $2\omega_0$ sowie c_3 und c_{-3} mit der Frequenz $3\omega_0$ je 20° bzw. 40° .



Im Mittel sieht man während des Zeitraums einer Periode **Abb. 35** „Zeigerkarussell“ mit „Belichtungszeit“ $T/36$ T von diesen rotierenden Zeigern jede Richtung eines Zeigers gleich oft. Um aus dem Signalmisch der rotierenden Zeiger

$x(t) = \sum_{i \rightarrow -\infty}^{i \rightarrow +\infty} c_i \cdot e^{j i \omega_0 t}$ gerade die Amplitude c_0 ermitteln, so muß

man von $x(t)$ lediglich den Mittelwert über eine Periode T berechnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left[\sum_{i \rightarrow -\infty}^{i \rightarrow +\infty} c_i \cdot e^{j i \omega_0 t} \right] dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{i \rightarrow -\infty}^{i=-1} c_i \cdot \int_0^T e^{j i \omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \cdot c_0 \int_0^T dt + \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=+1}^{i \rightarrow +\infty} c_i \cdot \int_0^T e^{j i \omega_0 t} dt
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Da, wie oben bereits anschaulich erkannt, während einer Periode T alle Richtungen der rotierenden Zeiger $e^{j \cdot i \cdot \omega_0 \cdot t}$ gleich oft vorkommen, verschwinden die beiden äußeren Integrale und es bleibt der Koeffizient c_0 übrig.

Aufgabe 8	Berechnen Sie das Integral $c_i = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{j \cdot i \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ für $i \neq 0$
------------------	---

Mit derselben Überlegung lassen sich auch die anderen Koeffizienten c_i , $i \neq 0$ ermitteln. Wenn wir nämlich das „Multikarussell“ insgesamt mit der Frequenz $k \cdot \omega_0$ in die **andere Richtung** rotieren lassen, als der Zeiger mit der Amplitude c_k sich dreht, so bleibt für den Betrachter genau dieser Zeiger in Ruhe, während jeder andere Zeiger vorbeihuscht und sich über die Grundperiode T im Mittel ein- oder mehrfach zu Null ergänzt.

Das Zurückdrehen der ganzen Funktion $x(t)$ mit der Frequenz $k \cdot \omega_0$ wird dadurch erreicht, daß man diese Funktion mit dem Faktor $e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$ multipliziert.

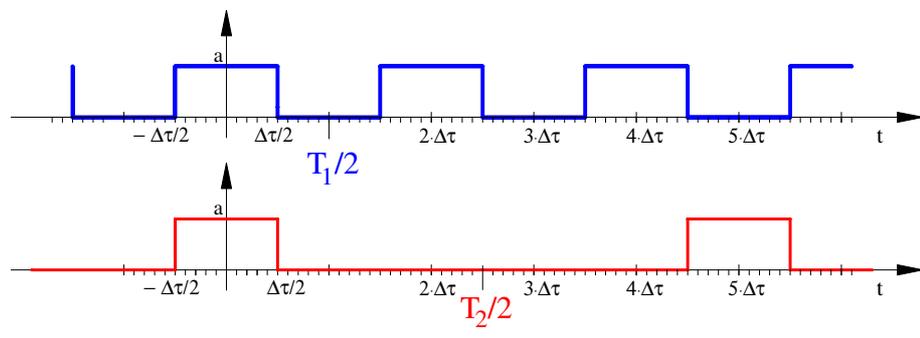
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left[\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} c_i \cdot e^{j \cdot i \cdot \omega_0 \cdot t} \right] \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=k-1} c_i \cdot \int_0^T e^{j \cdot (i-k) \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot c_k \int_0^T e^{j \cdot (k-k) \cdot \omega_0 \cdot t} dt + \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=k+1}^{i=+\infty} c_i \cdot \int_0^T e^{j \cdot (i-k) \cdot \omega_0 \cdot t} dt
 \end{aligned} \tag{64}$$

Wieder werden die Integrale in der linken und rechten Summe zu Null, so daß sich als Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten analog zu (63) ergibt:

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt \tag{65}$$

Aufgabe 9

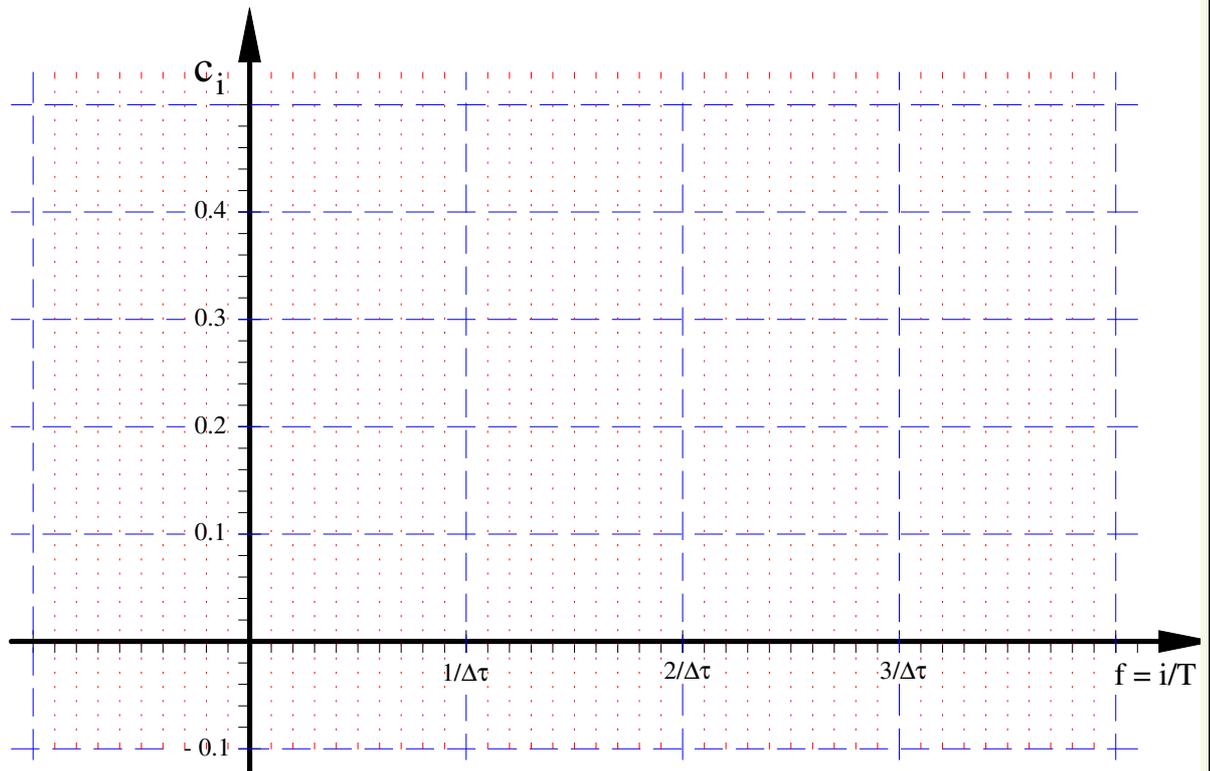
Gegeben seien die beiden periodischen Rechtecksignale gleicher Dauer $\Delta\tau$ aber unterschiedlicher Periode T .



Berechnen Sie allgemein die Fourierkoeffizienten c_k in Abhängigkeit von der Frequenz

$$f = \frac{i}{T} = i \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}$$

und tragen Sie die Linienspektren in das untenstehende Diagramm in der jeweils zugehörigen Farbe ein. Zum Zeichnen der Hüllkurven nehmen Sie zunächst i nicht als ganze Zahl sondern als reelle Zahl an.



Aufgabe 10

Gegeben seien die periodischen Funktion (Rechtecksignal) aus Aufgabe 9 mit der Periode $T_1 = 2 \cdot \Delta\tau$

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_0, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}$ und c_3, c_{-3} . Bilden Sie daraus mit Hilfe von Matlab oder Scicos schrittweise die Summe der rotierenden Zeiger und zeigen Sie den Verlauf der Summenzeiger über der Zeit t in einem Diagramm.

3.2 Von den Fourierkoeffizienten zur Fouriertransformation

Im Diagramm der Spektrallinien von Aufgabe 9 sieht man, daß der Abstand der Spektrallinien $\Delta f = \omega_0 / 2\pi = 1/T$ mit zunehmender Periodendauer T ebenso abnimmt wie die Amplitude der Spektrallinien. Dies rührt von der Mittelwertbildung der rotierenden Zeiger her, bei der das Integral in (65) noch durch die Periodendauer T dividiert werden muß. Dagegen hängt die Größe des Integrals allein offensichtlich nicht von der Periodendauer ab. Daher liegt es nahe, die Spektrallinie aus den beiden Faktoren $\Delta f = 1/T$ und dem Integral

$$X(k \cdot 2\pi f_0) = X(f_k) = \int_0^T x(t) \cdot e^{-jk \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-jk \cdot \omega_0 \cdot t} dt \quad (66)$$

darzustellen:

$$c_k = \Delta f \cdot X(f_k) = \Delta f \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_k \cdot t} dt \quad (67)$$

Darüber hinaus werden die Grenzen der Integration um eine halbe Periode zu früheren Zeiten hin verschoben, da es bei der Integration über eine volle Periode oder ein ganzzahlig Vielfaches davon nicht darauf ankommt, wo man mit der Summation beginnt und die Symmetrie der Grenzen für die weiteren Betrachtungen vorteilhaft ist.

Bildet man mit den so ermittelten Fourierkoeffizienten c_k die Fourierreihe $x(t)$, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$x(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow +\infty} c_k \cdot e^{jk \cdot 2\pi f_0 \cdot t} = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow +\infty} \left[\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_k \cdot t} dt \cdot \Delta f \right] \cdot e^{jk \cdot 2\pi f_0 \cdot t} \quad (68)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer stellt die Fourierkoeffizienten dar. Man kann ihn in einem Diagramm auch darstellen als Reihe von Rechtecken mit der Breite Δf und der Höhe $X(f_k)$.

Abb. 36 zeigt die diese Treppenfunktion aus Aufgabe 9 für die Rechteckpulsreihe mit der Impulsbreite 0.5 sec, der Impulshöhe $a = 1$ und der Periode $T = 5 \cdot \Delta\tau = 2.5$ sec .

Die Spektrallinien haben den Abstand $\Delta f = 1/T = 1/2.5 \text{ sec} = 0.4 \text{ Hz}$

Die Funktion $X(f_k)$, in Aufgabe 9 der Ausdruck

$$X(f_k) = a \cdot \Delta\tau \cdot \frac{\sin \pi \cdot k \cdot \Delta f \cdot \Delta\tau}{\pi \cdot k \cdot \Delta f \cdot \Delta\tau},$$

stimmt an den Stellen $f_k = k \cdot \Delta f$ mit der Treppenfunktion überein.

Vergößert man die Periode T der Zeitfunktion immer mehr, ohne die Gestalt des Rechteck mit der Breite $\Delta\tau$ und der Amplitude a zu ändern, dann wandern die Spektrallinien immer weiter zusammen, ohne daß sich die Hüllkurve ändert.

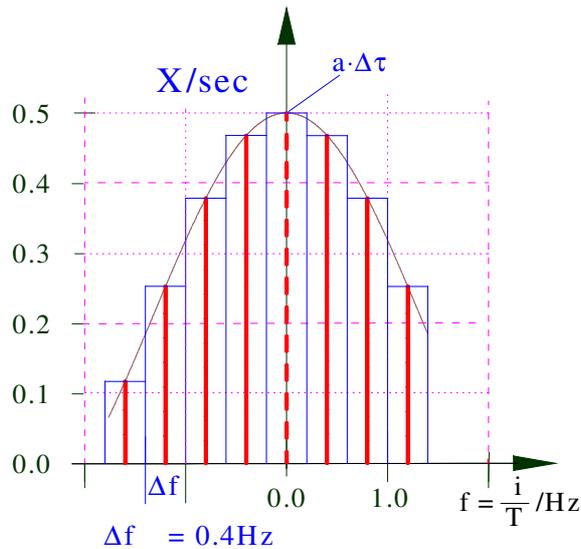


Abb. 36 Reduzierte Fourierkoeffizienten

Für $T \rightarrow \infty$ wird aus

$f_k = k \cdot f_0 = k/T = k \cdot \Delta f$ die kontinuierliche Frequenz f , und unter Voraussetzung der Konvergenz ergibt sich schließlich das Integral der **Fouriertransformation**:

$$\mathcal{F}(x(t)) = X(f) = \int_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t} dt \quad (69)$$

Sie ordnet einer Zeitfunktion $x(t)$ eine Bildfunktion $\mathcal{F}(x(t)) = X(f)$ im Frequenzbereich zu.

Auch in (68) kann man diesen Grenzübergang machen, da bei wachsendem T der Ausdruck $\Delta f = 1/T$ gegen Null geht und die Summe in das Integral mit dem Differential df übergeht..

$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left(\sum_{k \cdot f_0 \rightarrow -\infty}^{k \cdot f_0 \rightarrow +\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot k \cdot 2\pi f_0 \cdot t} \cdot \Delta f \right) = \int_{f \rightarrow -\infty}^{f \rightarrow +\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi f \cdot t} \cdot df \quad (70)$$

Diese zweite Beziehung führt die Spektralfunktion $X(f)$ wieder in die ursprüngliche Zeitfunktion $x(t)$ zurück und heißt „**Inverse Fouriertransformation**“ $\mathcal{F}^{-1}(X(f))$.

Die Integrale konvergieren auf alle Fälle für energiebegrenzte Signale. Die Fouriertransformation läßt sich aber auch auf nichtenergiebegrenzte Signale mit endlicher Leistung anwenden. Die folgenden beiden Aufgaben 12 und 13 führen hin auf die Ermittlung der Fouriertransformation solcher Signale, wie etwa eine Kosinusschwingung oder ein Gleichsignal endlicher Länge. Dabei werden wir wieder auf die Dirac'sche Deltadistribution stoßen.

Fouriersynthese

Endliche Periode $T = \frac{1}{\Delta f}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} (X_k \cdot \Delta f) \cdot e^{+j2\pi k \cdot \Delta f \cdot t} \\ &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{+j2\pi f_k \cdot t} \end{aligned}$$

Fourieranalyse

$$\begin{aligned} X_k &= X(k \cdot \Delta f) = \frac{c_k}{\Delta f} = \\ &= X(f_k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j2\pi k \cdot \Delta f \cdot t} dt \end{aligned}$$

Inverse Fouriertransformation

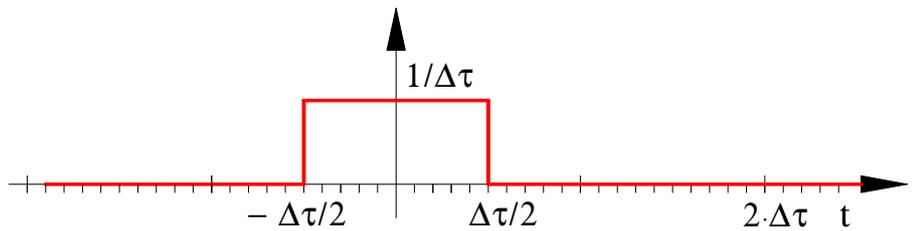
Unendliche Periode $T = \frac{1}{\Delta f} \rightarrow \infty$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi f \cdot t} df$$

Fouriertransformation

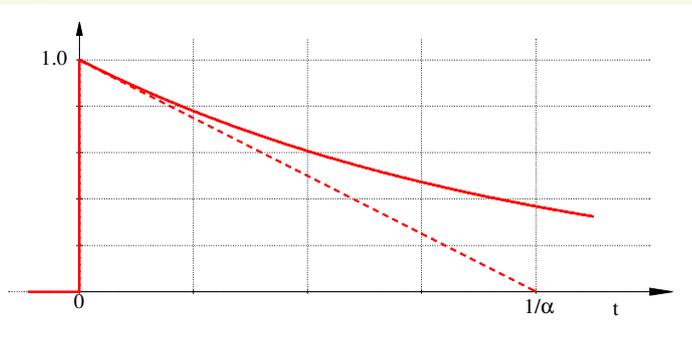
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t} dt$$

Aufgabe 11 Gegeben sei ein Impuls $\delta_N(t)$ mit der Dauer $\Delta\tau$ und der Amplitude $1/\Delta\tau$ („Normimpuls“ mit der Fläche 1).



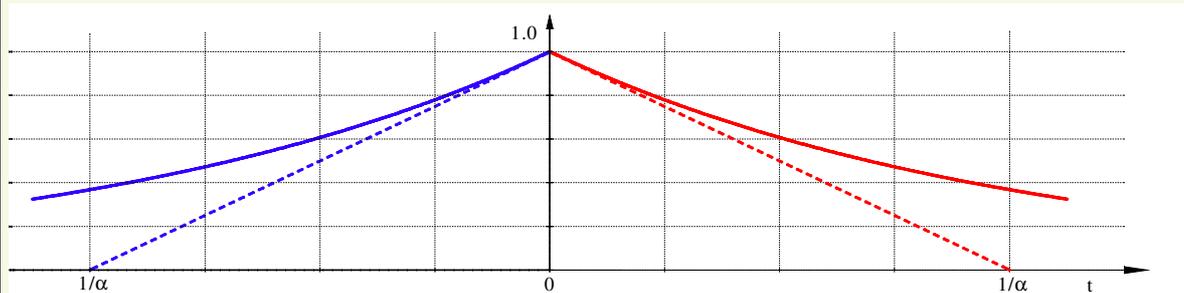
Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X_{\delta_N}(f)$ dieses Normimpulses.

Aufgabe 12 Gegeben sei die Zeitfunktion $x_1(t) = \sigma(t) \cdot e^{-\alpha t}$



- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X_1(f)$ (Ergebnis: $X_1(f) = \frac{1}{\alpha + j \cdot 2\pi f}$)

Aufgabe 13 Gegeben sei die Zeitfunktion $x(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \\ e^{+\alpha t} & \text{für } t < 0 \end{cases}$



- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X(f)$ (Ergebnis: $X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$)

- Wie groß ist die Fläche unter $X(f)$?

3.2.1 Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation und Anwendung auf diskrete Systeme

3.2.1.1 Spektrum des Normimpulses und der δ -Distribution

Zunächst betrachten wir zwei Normimpulse $\delta_N(t)$ mit der Fläche 1 (Abb. 37). Die Fouriertransformation ergibt als Spektrum die bekannte $\sin(x)/x$ -Funktion mit

$$X_{\delta_N}(f) = \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \quad (71)$$

Je schmaler der Impuls $\delta_N(t)$ wird, desto mehr verbreitert sich die $\sin(x)/x$ -Funktion (Abb. 38)

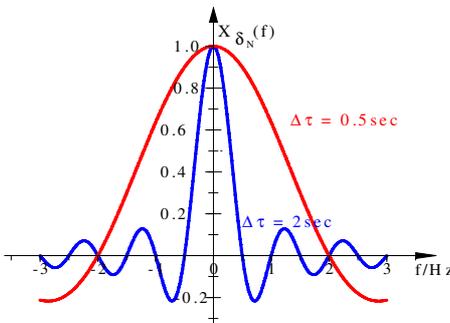


Abb. 38 ... ein sich verbreiterndes Spektrum

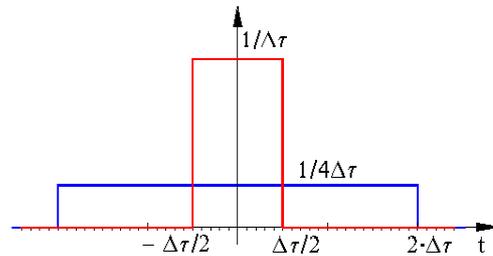


Abb. 37 Abnehmende Normimpulsbreite führt auf ...

Lässt man schließlich $\Delta \tau \rightarrow 0$ gehen, so erhält man die Dirac'sche Deltadistribution $\delta(t)$. Deren Spektrum $X_\delta(f)$ weist für alle Frequenzen den konstanten Wert 1 auf. Es gilt also:

$$x_\delta(t) = \delta(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad X_\delta(f) = 1 \quad (72)$$

Das Symbol „O---●“ hat sich eingebürgert für $X(f) = \mathcal{F}(x(t))$.

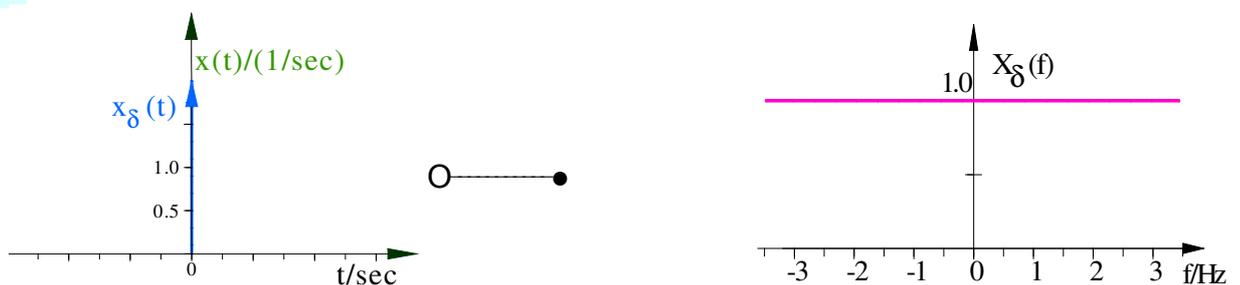


Abb. 39 Die Fouriertransformierte einer $\delta(t)$ -Distribution ist das Spektrum $X_\delta(f) = 1$

Ergebnis:

Die Fouriertransformierte eines zeitlichen Dirac-Impulses ist ein Frequenzspektrum $X_\delta(f) = 1$, das alle Frequenzen mit gleicher Amplitude beinhaltet

3.2.1.2 Spektrum eines Gleichsignals

Bei der Ermittlung des Spektrum einer Deltadistribution war die Rechteckfunktion in Abb. 37 sehr hilfreich. Sie führt ja auf die $\sin(x)/x$ -Funktion, die uns mittlerweile schon sehr vertraut ist. Wählt man als Amplitude nicht $1/\Delta\tau$ sondern 1, dann ist das Spektrum die mit $\Delta\tau$ multiplizierte $\sin(x)/x$ -Funktion. Lässt man $\Delta\tau \rightarrow \infty$ gehen, dann wächst die Amplitude bei $f = 0$ über alle Schranken, während die Nullstelle zunehmend gegen 0 wandern. Ein klarer Fall von δ -Distribution möchte man meinen. Dazu müsste allerdings auch das Uneigentliche Integral über diese Funktion für alle $\Delta\tau$ gleich 1 sein. Leider tut sie uns diesen Gefallen in keiner Weise. Ja, sie widersetzt sich jedem Integrationsversuch aufs heftigste und konvergiert nicht. Damit existiert dafür kein Grenzwert einer Funktionenfolge.

Daher müssen wir uns nach eine anderen Zeitfunktion umsehen, die als Grenzfunktion $x(t)=1$ ergibt und uns im Gegenzug im Frequenzbereich eine konvergente Funktionenfolge liefert. Dazu bietet sich uns die Zeitfunktion aus Aufgabe 13 an. Lässt man bei der symmetrisch zu Null abfallenden Exponentialfunktion $x(t) = e^{-\alpha|t|}$ die Grenzkreisfrequenz α gegen Null gehen so entsteht die gewünschte Zeitfunktion $x(t)=1$. Für die Fouriertransformierte lieferte die Aufgabe als Ergebnis

$$X(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \quad (73)$$

und die Fläche unter dieser Kurve ist tatsächlich gleich 1 unabhängig vom Wert der Grenzkreisfrequenz α .

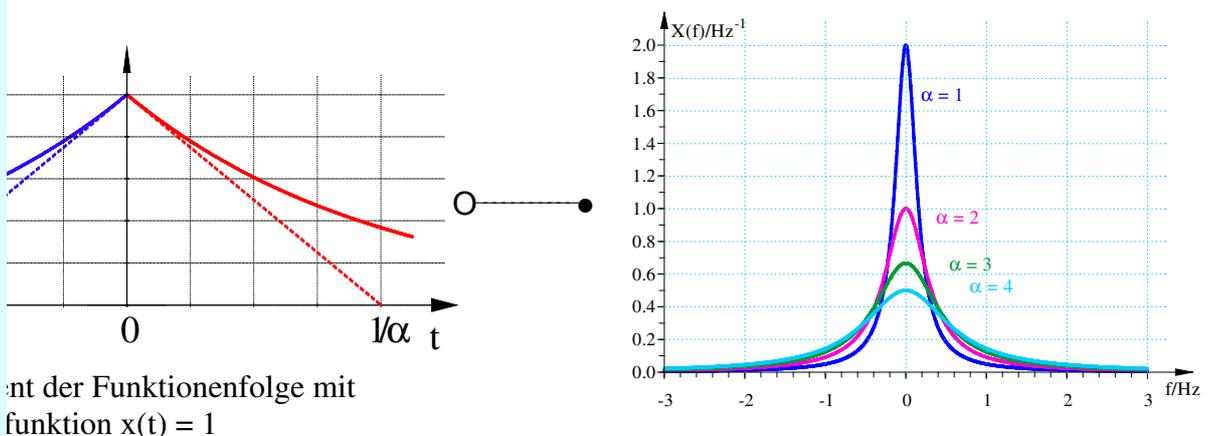


Abb. 41 Fouriertransformierte für abnehmendes α

Für $\alpha \rightarrow 0$ konvergiert $X(f)$ gegen die Delta-Distribution $\delta(f)$ im Frequenzbereich. Hier hat die Delta-Distribution die Dimension 1/Hz, während die zeitliche Delta-Distribution die Einheit 1/sec hat. Damit gilt folgende Zuordnung:

$$x(t) = 1 \quad \text{○} \text{---} \bullet \quad X(f) = \delta(f) \quad (74)$$

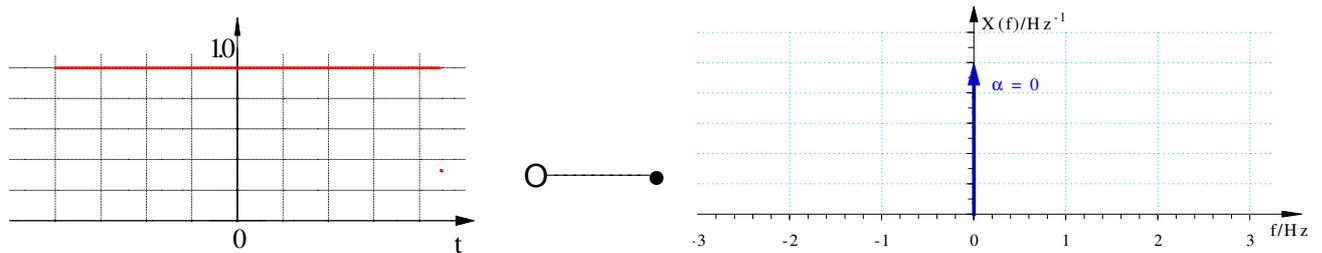


Abb. 42 Fouriertransformierte des konstanten Zeitsignals $x(t) = 1$

Ergebnis:
Die Fouriertransformierte eines Gleichsignals mit Amplitude 1 ist eine Delta-Distribution im Frequenzbereich mit der Einheit 1/Hz

Die bisherigen Ergebnisse lassen die Vermutung zu, daß leistungsbegrenzte Zeitsignale sich mit Hilfe der Delta-Distribution darstellen lassen. Diese Vermutung wird sich mit den folgenden Überlegungen bestätigen.

3.2.1.3 Zeitliche Verschiebung einer Zeitfunktion um t_{abt}

Da wir in 3.4 ein kontinuierliches Signal mit einer Reihe aus δ -Impulsen abtasten werden, die mit der Periodendauer t_{abt} aufeinander folgen, ist das Spektrum einer zeitlich um t_{abt} nach hinten verschobenen Zeitfunktion $x(t)$, also

$x^*(t) = x(t - t_{\text{abt}})$ von Interesse. Die Herleitung erfolgt völlig analog zum Verschiebungssatz der Laplace-Transformation Kap. 1.2.3, der mit Einführung von z zur z -Transformation führte.

Bildet man nämlich die Fouriertransformierte $X^*(f)$ mit

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{-2\pi f t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_{\text{abt}}) \cdot e^{-2\pi f t} \cdot dt \quad (75)$$

und ersetzt die Differenz $t - t_{\text{abt}}$ durch

$$t^* = t - t_{\text{abt}}, \quad (76)$$

so bleiben die Integrationsgrenzen erhalten und es gilt

$$dt^* = dt \quad \text{sowie} \quad e^{-j2\pi f t} = e^{-j2\pi f (t^* + t_{abt})} = e^{-j2\pi f t^*} \cdot e^{-j2\pi f t_{abt}} \quad (77)$$

Die Fouriertransformierte $X^*(f)$ der um t_{abt} verschobenen Zeitfunktion $x^*(t) = x(t - t_{abt})$ lautet damit:

$$X^*(f) = e^{-j2\pi f t_{abt}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t^*) \cdot e^{-j2\pi f t^*} \cdot dt^* = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_{abt}} \quad (78)$$

Verschiebungssatz für zeitliche Verschiebung um t_{abt} :

Wird die Zeitfunktion $x(t)$ auf den um t_{abt} späteren Zeitpunkt verschoben, so ergibt sich die Fouriertransformierte $X^*(f)$ der Zeitfunktion $x^*(t) = x(t - t_{abt})$ dadurch, daß man das Spektrum $X(f)$ der unverschobenen Zeitfunktion $x(t)$ mit $e^{-j2\pi f t_{abt}}$ multipliziert.

Achtung!!! Exponent ist wegen der Fouriertransformation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt \quad \text{NEGATIV, also} \quad -j2\pi f t_{abt}$$

Wegen der Abtastung ist besonders die um t_{abt} verschobene δ -Distribution $x_{\delta}^*(t) = \delta(t - t_{abt})$ interessant. Für das Spektrum $X(f)$ der unverschobenen Zeitfunktion $x_{\delta}(t) = \delta(t)$ gilt ja

$$x_{\delta}(t) = \delta(t) \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad X_{\delta}(f) = 1 \quad (72)$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt für das Spektrum der verschobenen δ -Distribution:

$$x_{\delta}^*(t) = \delta(t - t_{abt}) \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad X_{\delta}^*(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi f t_{abt}} \quad (79)$$

Der Betrag des Spektrums bleibt als nach wie vor 1, lediglich die Phase ändert sich laufend.

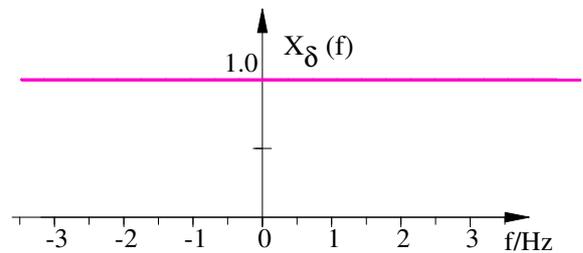
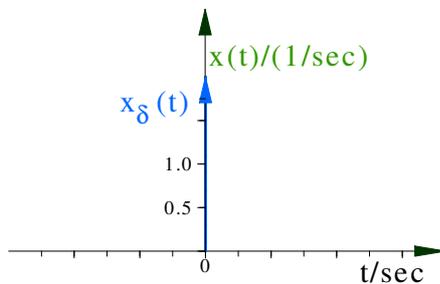
3.2.2 Zusammenfassende Beispiele

Für die Digitalisierung kontinuierlicher Signale durch Abtastung sind vor allem sinusförmige Zeitsignale sowie das Gleichsignal und deren Spektren von Interesse. Daher beschränken sich die folgenden Beispiele auf diese Gattung und bereiten damit das Verständnis der folgenden Kapitel vor. Insbesondere werden die Zusammenhänge durch die Abbildungen der Zeitfunktionen und der Spektren veranschaulicht, damit sie sich besser und dauerhafter ins Gedächtnis eingraben.

3.2.2.1 Verschiebung von $\delta(t)$ um die Zeit t_{abt} .

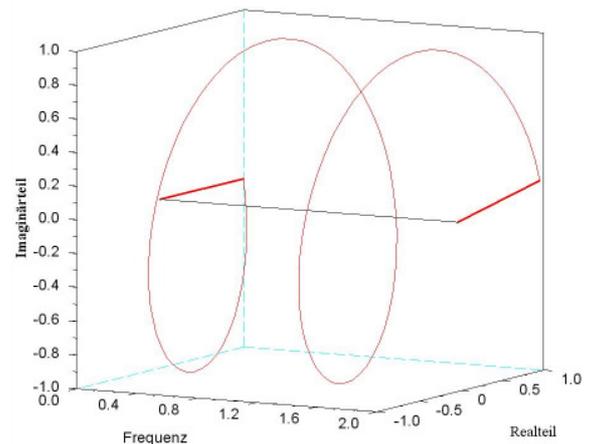
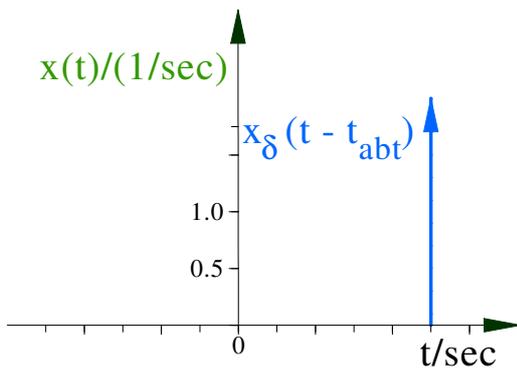
Ausgangsfunktion mit Spektrum

$$x_{\delta}(t) = \delta(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad X_{\delta}(f) = 1$$



Verschobene Zeitfunktion mit Spektrum

$$x_{\delta}(t) = \delta(t - t_{abt}) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad X_{\delta}(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi f t_{abt}}$$

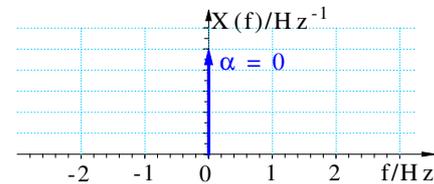
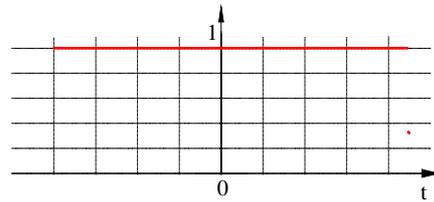


Die Zeitfunktion hat wegen der δ -Distribution die Dimension 1/sec. Daraus folgt, daß das Frequenzspektrum dimensionslos ist.

3.2.2.2 Verschiebung des Spektrums des Gleichsignals um f_0

Ausgangsfunktion mit Spektrum

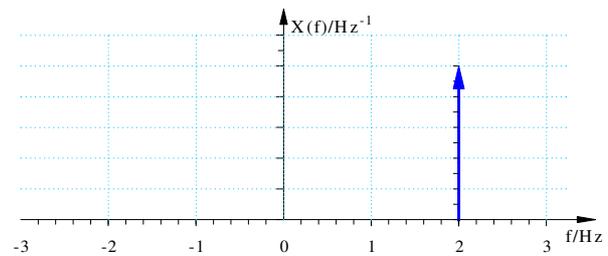
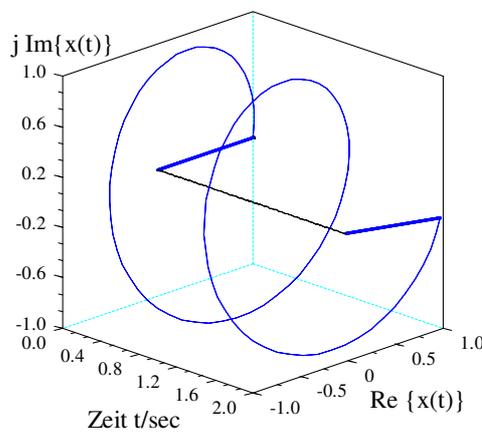
$$x(t) = 1 \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad X(f) = \delta(f)$$



Um f_0 verschobenes Spektrum ...

... und mit f_0 rotierender Zeiger

$$x(t) = 1 \cdot e^{+j2\pi f_0 t} \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad X(f) = \delta(f - f_0)$$

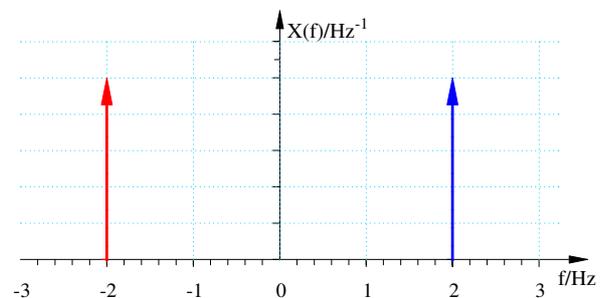
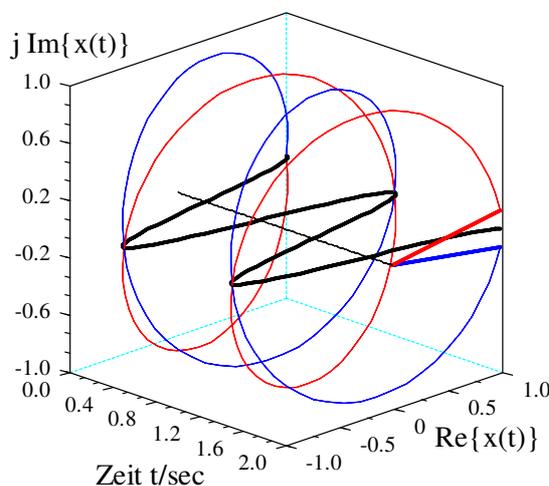


Die Zeitfunktion ist dimensionslos, während das Spektrum hier die Dimension 1/Hz hat

3.2.2.3 Summe zweier um $\pm f_0$ verschobener $\delta(f)$ -Distributionen

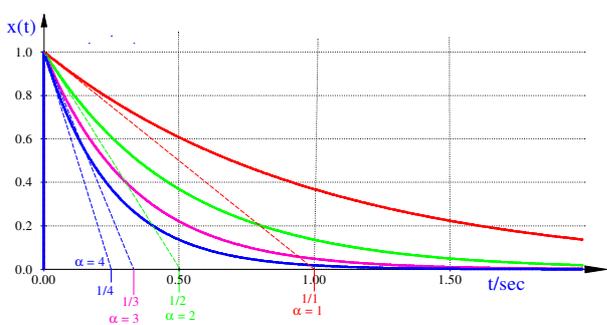
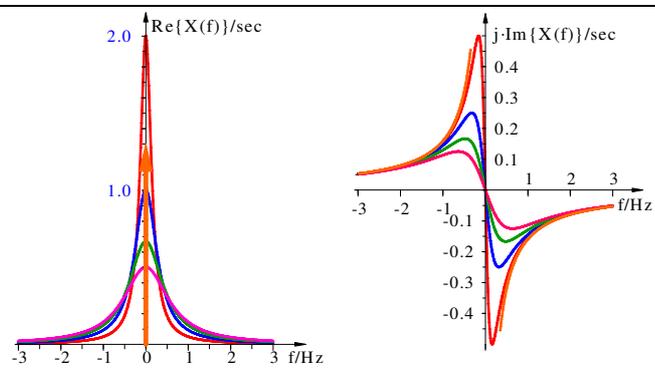
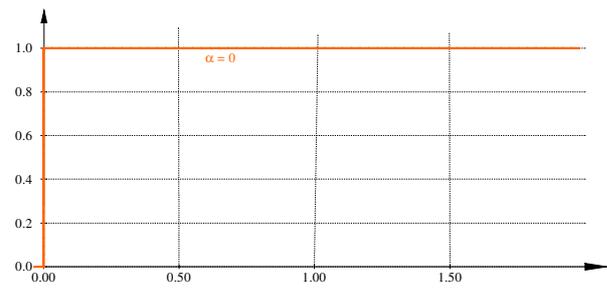
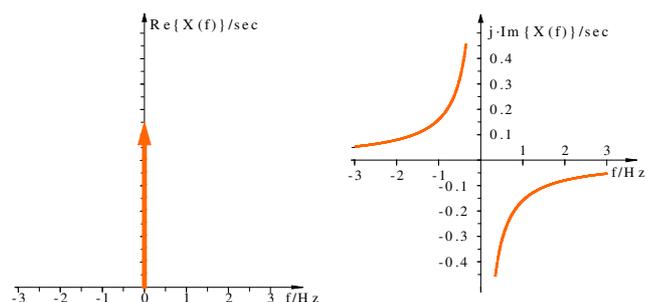
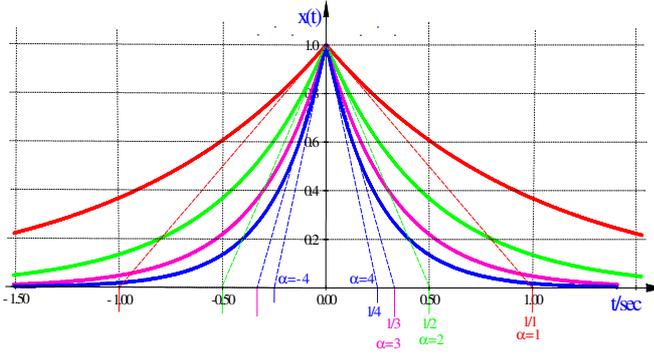
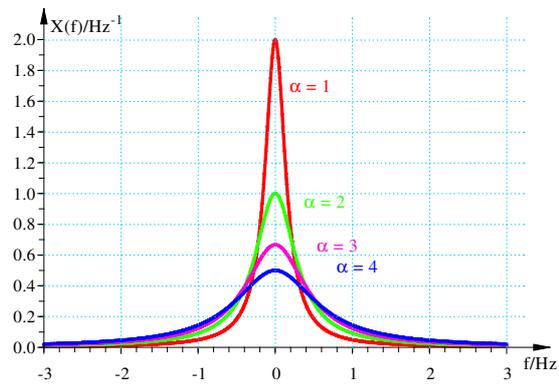
Ausgangsfunktion ist wieder, wie in 3.2.2.2, $\delta(f)$ -Distributionen, jedoch nun kommt eine weitere, diesmal nach links auf $-f_0$ verschobene $\delta(f)$ -Distribution dazu.

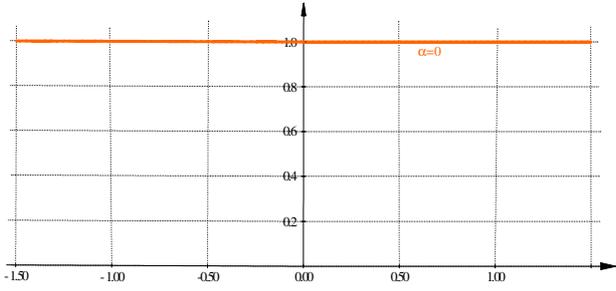
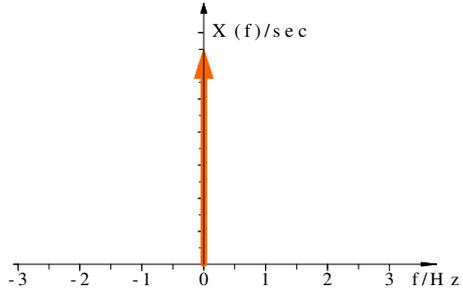
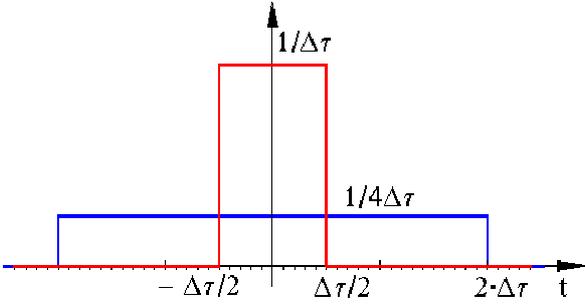
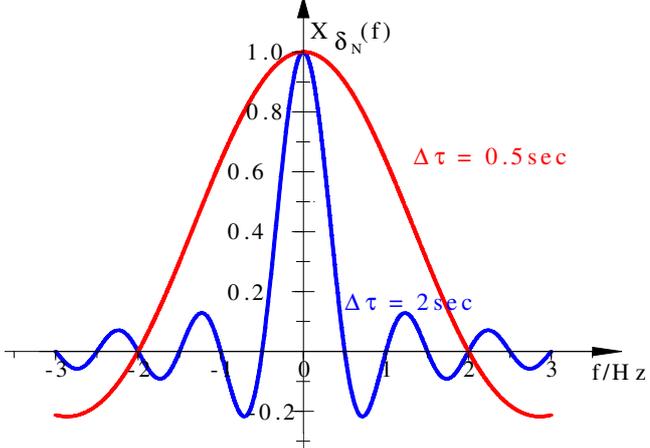
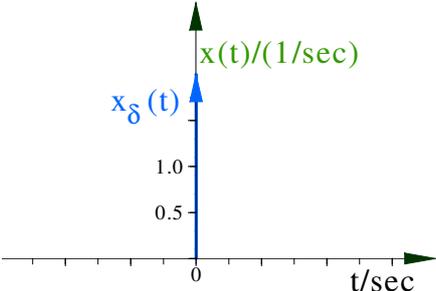
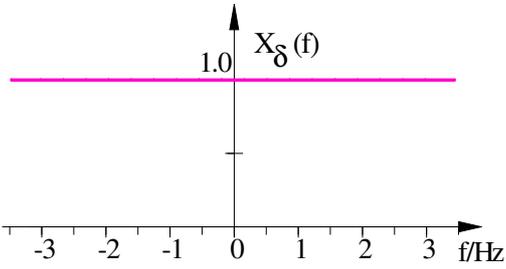
$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{+j2\pi f_0 t}) \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad X(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$



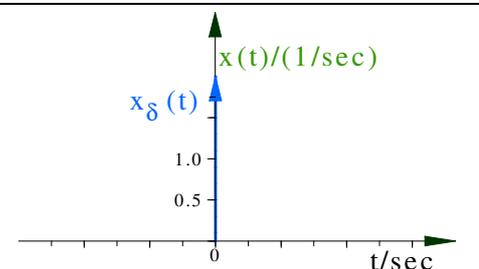
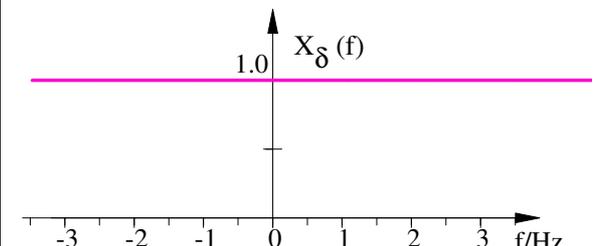
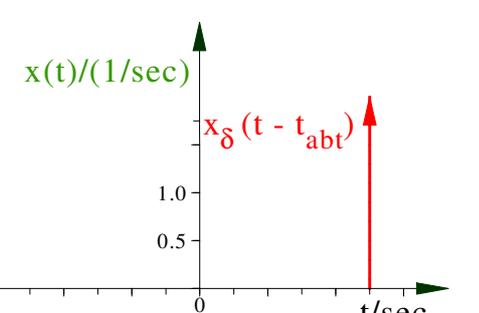
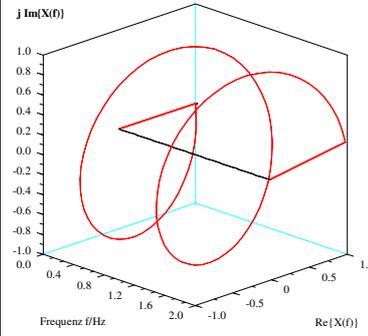
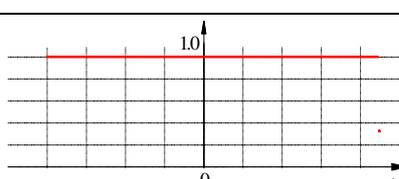
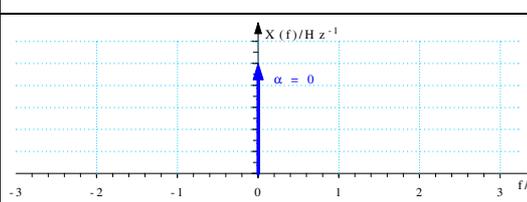
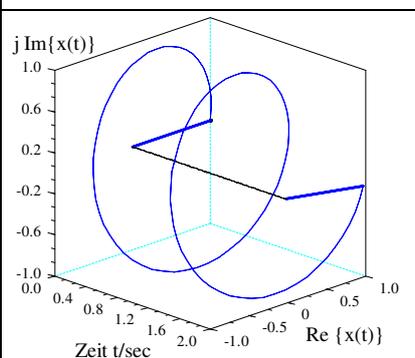
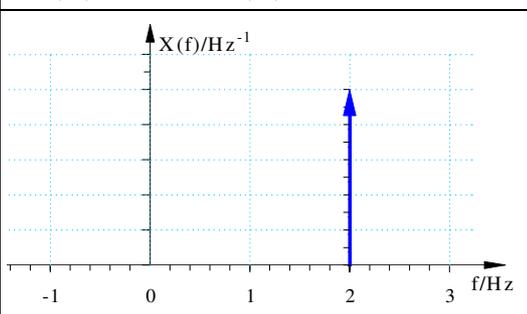
Die bekannte Kosinusfunktion $\cos(2\pi f_0 t)$ lässt sich also durch zwei $\delta(f)$ -Distributionen darstellen.

3.2.3 Wichtige Zeitfunktionen und ihre Fouriertransformierten

Zeitbereich	Frequenzbereich
 <p>$x(t) = \sigma(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$</p>	 $X(f) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \cdot \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$
 <p>$x(t) = \sigma(t)$</p>	 $X(f) = X_{\sigma}(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2\pi f}$
 <p>$x(t) = e^{-\alpha \cdot t }$</p>	 $X(f) = \frac{2 \cdot \alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$

Zeitbereich	Frequenzbereich
 <p>$x(t) = 1$</p>	 <p>$X(f) = \delta(f)$</p>
 $x(t) = \delta_N(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau} & \text{für } -\frac{\Delta\tau}{2} \leq t \leq \frac{\Delta\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	 <p>$X(f) = X_{\delta_N}(f) = \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta\tau)}{\pi \cdot f \cdot \Delta\tau}$</p>
 <p>$x(t) = \delta(t)$</p>	 <p>$X(f) = X_{\delta}(f) = 1$</p>

Verschiebung von Zeitfunktion bzw. Spektrum

Zeitbereich	Frequenzbereich
 <p style="margin-top: 10px;">$x(t) = x_{\delta}(t) = \delta(t)$</p>	 <p style="margin-top: 10px;">$X(f) = X_{\delta}(f) = 1$</p>
 <p style="margin-top: 10px;">$x^*(t) = x_{\delta}(t - t_{abt}) = \delta(t - t_{abt})$</p>	 <p style="margin-top: 10px;">$X^*(f) = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_{abt}} \cdot X_{\delta}(f) = e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_{abt}}$</p>
 <p style="margin-top: 10px;">$x(t) = 1$</p>	 <p style="margin-top: 10px;">$X(f) = \delta(f)$</p>
 <p style="margin-top: 10px;">$x^*(t) = x(t) \cdot e^{+j2\pi \cdot f_0 \cdot t} = e^{+j2\pi \cdot f_0 \cdot t}$</p>	 <p style="margin-top: 10px;">$X^*(f) = X(f - f_0) = \delta(f - f_0)$</p>

3.3 Abtastung kontinuierlicher Signale

3.3.1 Modellierung der Umwandlung eines kontinuierlichen Signals in eine Treppenfunktion

In einem digitalen Regelsystem (Abb. 44) werden dem analogen Signal $u(t)$ zu äquidistanten Zeitpunkten $i \cdot t_{\text{abt}}$ mit Hilfe eines Analog-Digitalwandlers Meßwerte entnommen (Abb. 43) und in Zahlenwerte u_i umgewandelt. Durch die Speicherung dieser Werte bis zum jeweils nächsten Abtastzeitpunkt $(i + 1) \cdot t_{\text{abt}}$ entsteht das Treppensignal x_T , das im digitalen Regler weiterverarbeitet wird.

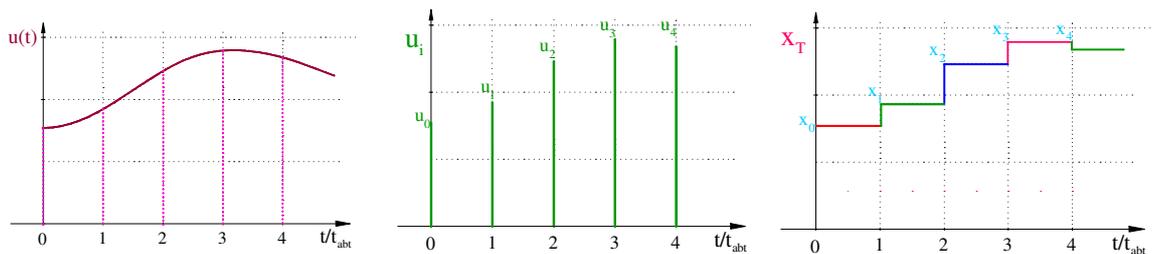


Abb. 43 Entnahme von Signalwerten, Umwandlung in eine Zahlenfolge und Erzeugung einer Treppenfunktion durch Zwischenspeicherung



Abb. 44 Realisierung im Rechner

Um das stationäre und dynamische Verhalten des Regelsystem berechnen zu können, muß dieser Vorgang mathematisch geeignet modelliert werden. Die Umwandlung der kontinuierlichen Zeitfunktion $u(t)$ in die Treppenfunktion $x_T(t)$ läßt sich mit Hilfe von Einzelimpulsen der Dauer t_{abt} (Abtastintervall) bewerkstelligen, so wie bei der Herleitung des Faltungssatzes in Kap. 2.4.1. Diese Impulse lassen sich mit Hilfe der in Kap 3.2.1 hergeleiteten Fouriertransformierten im Frequenzbereich darstellen. Damit werden wir den Abtastvorgang in einer geschlossenen Darstellung im Frequenzbereich erhalten, so daß wir im einzelnen das Frequenzverhalten des Abtastsystems untersuchen können. Ein Ergebnis wird das bereits anschaulich in Kap.1.2.5.2 verstandene Abtasttheorem von Shannon sein.

Zur Herleitung des Modells der Abtastung werden wir zunächst einige Teilaspekte vorab beleuchten, nämlich

- das Spektrum einer δ -Impulsreihe
- das Spektrum $X_{T_i}(f)$ eines Impulses $x_{T_i}(t)$ mit der Amplitude 1 und der Dauer t_{abt}
- das Spektrum $X_T(f)$ der aus diesen Impulsen gebildeten Treppenfunktion

Dieses Ergebnis wird uns auf eine dem obigen Blockschaltbild Abb. 44 ähnliche Struktur führen, die dasselbe leistet, jedoch kein 1:1-Abbild dieses Blockschaltbildes ist [6].

3.3.1.1 Spektrum einer $\delta(t)$ -Impulsfolge

Wir werden im Laufe der Modellierung auf eine Ausdruck der Form

$\sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot t_{abt}}$ stoßen. Diesem Spektrum aus lauter rotierenden Zeigern

entspricht mit dem Verschiebungssatz für Zeitfunktionen (78) und dessen Anwendung auf die $\delta(t)$ -Distribution (79) einer δ -Impulsfolge im Zeitbereich:

$$x_{\delta_{abt}}(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{abt}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_{\delta_{abt}}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot t_{abt}} \quad (82)$$

(Später in Kap 3.4.2 werden wir auch die überraschende Tatsache feststellen, daß sich die $\delta(t)$ -Impulsreihe im Zeitbereich auch durch eine $\delta(f)$ -Impulsreihe im Frequenzbereich darstellen läßt. Für die unmittelbar folgenden Überlegungen benötigen wir aber diese Zusammenhänge noch nicht.)

3.3.1.2 Spektrum eines Eins-Impulses der Dauer t_{abt}

Die Treppenfunktion $x_T(t)$ repräsentiert ja das kontinuierliche Signal und wird aus Impulsen mit der Amplitude u_k zusammengesetzt. Dazu versuchen wir im folgenden, das Spektrum eines Impulses mit der Amplitude 1 und der Dauer t_{abt} zu finden. Wir verwenden zwei Einheitssprünge σ_1 zum Zeitpunkt $t = 0$ und σ_2 zum Zeitpunkt t_{abt} , die wir voneinander abziehen (Abb. 45):

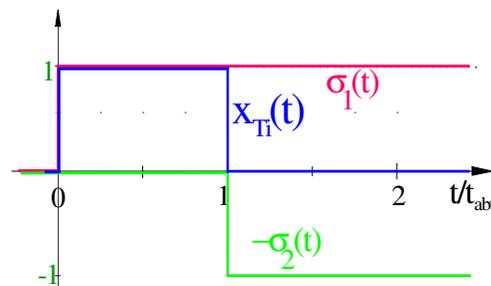


Abb. 45 Eins-Impuls x_{Ti} mit der Dauer t_{abt} aus der Differenz zweier Einheitssprünge

$$x_{Ti}(t) = \sigma_1(t) - \sigma_2(t) = \sigma(t) - \sigma_2(t) \quad (83)$$

mit

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq t_{abt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (84)$$

Um die Fouriertransformierte $X_{T_i}(f)$ zu ermitteln, benötigen wir die Fouriertransformierten der beiden Sprünge.

Nach der Tabelle in Kap. 3.2.3 ist das Spektrum $X_{\sigma}(f)$ des Einheitssprungs

$$X_{\sigma_1}(f) = X_{\sigma}(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2\pi f} \quad (85)$$

Für den um t_{abt} nach rechts verschobenen Einheitssprung gilt mit dem Verschiebungssatz (78)

$$X_{\sigma_2}(f) = X_{\sigma}(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_{\text{abt}}} = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{e^{-j2\pi f \cdot t_{\text{abt}}}}{j \cdot 2\pi f} \quad (86)$$

und $\delta(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_{\text{abt}}} = \delta(f)$

Damit ergibt sich endgültig als Spektrum $X_{T_i}(f)$ des Eins-Impulses

$$X_{T_i}(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi f \cdot t_{\text{abt}}}}{j \cdot 2\pi f} \quad (87)$$

3.3.2 Spektrum $X_T(f)$ der Treppenfunktion $x_T(t)$

Als letzter Schritt erfolgt nun die Darstellung der Treppenfunktion durch eine Folge von im Abstand t_{abt} aufeinanderfolgenden Einsimpulsen, die mit dem Funktionswert $u(k \cdot t_{\text{abt}})$ gewichtet sind. Das Ergebnis führt auf ein Blockschaltbild aus linearen Systemen, das die in Abb. 43 gezeigte Behandlung des kontinuierlichen Signals durch den Rechner in mathematisch geschlossener und als Frequenzgang auswertbarer Form modelliert.

Nach Abb. 43 wird der kontinuierlichen Funktion zu den diskreten Zeiten $k \cdot t_{\text{abt}}$ der zugehörige Funktionswert $u_k = u(t_k)$ entnommen und bis zum nächsten Abtastzeitpunkt gespeichert. Die entstehende Treppenfunktion lässt sich darstellen durch

$$x_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{\infty} u(k \cdot t_{\text{abt}}) \cdot [\sigma(t - k \cdot t_{\text{abt}}) - \sigma(t - (k+1) \cdot t_{\text{abt}})] \quad (88)$$

also durch die mit u_k gewichtet Summe aufeinanderfolgender und durch die Differenz zweier Einheitssprungantworten dargestellten Eins-Impulse. Daraus folgt mit (86) die Fouriertransformierte der Treppenfunktion

$$\begin{aligned}
 X_T(f) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{\infty} u(k \cdot t_{abt}) \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot t_{abt}}}{j2\pi \cdot f} - \frac{e^{-j2\pi \cdot f \cdot (k+1) \cdot t_{abt}}}{j2\pi \cdot f} \right] \\
 &= \frac{1 - e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_{abt}}}{j2\pi \cdot f} \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{\infty} u(k \cdot t_{abt}) \cdot e^{-j2\pi \cdot k \cdot f \cdot t_{abt}}
 \end{aligned} \tag{89}$$

Der Ausdruck unter der Summe sind Zeiger im Frequenzbereich. Die Länge dieser Zeiger sind die Funktionswerte $u_k = u(k \cdot t_{abt})$, die der kontinuierlichen Funktion $u(t)$ zu den diskreten Zeitpunkten $k \cdot t_{abt}$ entnommen werden

Vergleicht man diese Summe mit dem Spektrum (82) in Kap. 3.3.1.1, so stellt man fest, daß die zu dieser Summe im Frequenzbereich gehörende Zeitfunktion eine mit $u(k \cdot t_{abt})$ gewichtete Reihe aus δ -Distributionen darstellt. Der Faktor vor dieser Summe im Frequenzbereich, die Fouriertransformierte des Einsimpulses, macht also offensichtlich im Zeitbereich aus dieser δ -Impulsreihe die gewünschte Treppenfunktion $x_T(t)$. Wir nennen es „ δ -Halteglied“, weil es aus einer δ -Distribution mit dem **Impulsintegral 1** einen Impuls mit der **Amplitude 1** und endlicher Dauer t_{abt} bis zum nächsten δ -Impuls macht.

3.3.3 Mathematische Darstellung der Abtastung

Die Reihe der mit den Diracimpulsen multiplizierten Signalwerte

$$u_{\delta}(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} u(k \cdot t_{abt}) \cdot \delta(t - k \cdot t_{abt}) \tag{90}$$

läßt sich also auch als Produkt der kontinuierlichen Zeitfunktion $x(t)$ mit der Diracpulsreihe darstellen

$$u_{\delta}(t) = u(t) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{abt}) \tag{91}$$

und ergibt sich allgemein aus der Eigenschaft der δ -Distribution, die für

Argumente ungleich Null verschwindet, also $\delta(z) = 0$ für $z \neq 0$.

Damit ist das mathematisches Modell der realen Abtastung im Rechner nach Abb. 43 durch folgendes Blockschaltbild darstellbar:



Abb. 46 Modellierung der Abtastung und Speicherung

Mit dem δ -Abtaster werden zu äquidistanten Zeitpunkten (Intervall t_{abt}) dem analogen Signal $u(t)$ Werte entnommen, die das Gewicht einer δ -Distribution durch $u(k \cdot t_{\text{abt}})$ bestimmen. Die physikalische Einheit dieser gewichteten Folge ist damit z.B. Volt/Se-kunde.

Das δ -Halteglied, dessen Antwort auf eine $\delta(t)$ -Distribution (mit Einheit 1/sec) der Eins-Impuls mit Dauer t_{abt} und Amplitude 1 ist, macht aus dieser mit $u(k \cdot t_{\text{abt}})$ gewichteten $\delta(t)$ -Folge die gewünschte Treppenfunktion $x_T(t)$

Zum Vergleich auch nochmals Abb. 44, die zeigt, wie die nach Abb. 46 modellierte Abtastung und Erzeugung der Treppe durch die Verarbeitung im Rechner erfolgt:



Abb. 44 Realisierung im Rechner

3.4 Spektrum abgetasteter Signale – Shannon'sches Abtasttheorem

Um zu verstehen, wie aus einem abgetasteten Signal das ursprüngliche, kontinuierliche Signal wiedergewonnen werden kann, ist es nötig, das Spektrum des abgetasteten Signals zu betrachten. Im folgenden wird dies allgemein hergeleitet und am Beispiel einer abzutastenden Kosinusschwingung $u(t) = 2 \cdot \cos 2\pi f_0 t$ mit der Frequenz $f_0 = 0.2\text{Hz}$ und der Amplitude 2 durch eine Diracimpulsreihe mit der Abtastfrequenz $f_{\text{abt}} = 1\text{Hz}$ veranschaulicht (Abb. 47).

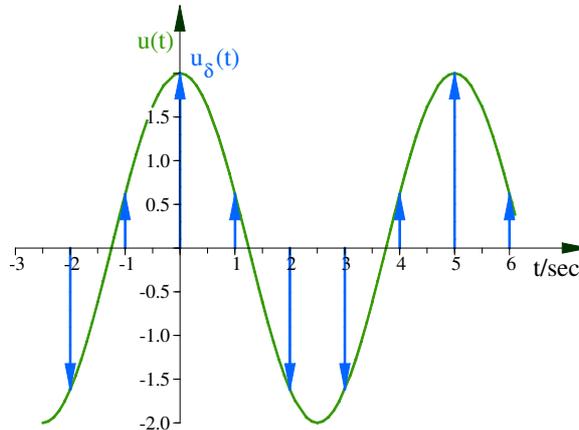


Abb. 47 Durch Diracimpulse abgetastete Kosinusschwingung

Die mit δ -Impulsen abgetastete Funktion $x(t)$ liefert durch Multiplikation mit der δ -Impulsreihe

$$g(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{\text{abt}}) \quad (92)$$

die Abtastreihe (91). Im folgenden wird untersucht, welches Spektrum $U_\delta(f)$ die Multiplikation zweier Zeitfunktionen $u(t)$ mit dem Spektrum $U(f)$ und $g(t)$ mit dem Spektrum $G(f)$ ergibt.

Dazu muß auch das Spektrum der δ -Impulsreihe ermittelt werden. Dies wird zu einem überraschenden Ergebnis führen.

Für die Herleitung des Spektrums des abgetasteten Signals wird in folgenden Schritten vorgegangen:

- Ermittlung des Spektrums zweier multiplizierter Zeitfunktionen
- Ermittlung des Spektrums der (zeitlichen) $\delta(t)$ -Impulsreihe
- Faltung einer Zeitfunktion mit einer $\delta(t)$ -Distribution
- Faltung zweier δ -Distributionen
- Ermittlung des Spektrums der mit der Kosinusfunktion $u(t) = 2 \cdot \cos 2\pi f_0 t$ multiplizierten δ -Impulsreihe

3.4.1 Spektrum zweier multiplizierter Zeitfunktionen

Bei der Laplacetransformation haben wir in 2.4.3 gesehen, daß die Faltung zweier Zeitsignale in die Multiplikation der zugehörigen Laplacetransformierten abgebildet wird. Angesichts der bisher kennengelernten Symmetrien zwischen Zeit- und Frequenzbereich ist zu erwarten, daß die Multiplikation zweier Zeitfunktionen $u(t)$ und $g(t)$ umgekehrt zur Faltung der zugehörigen Spektren $U(f)$ und $G(f)$ führt.

Ausgangspunkt seien also die beiden Zeitfunktion $u(t)$ und $g(t)$ mit den zugehörigen Spektren $U(f)$ und $G(f)$:

$$\begin{array}{ccc} u(t) & \text{O} \text{---} \bullet & U(f) \\ g(t) & \text{O} \text{---} \bullet & G(f) \end{array} \quad (93)$$

Gesucht ist das Spektrum $U_{\delta}(f)$ der beiden multiplizierten Zeitfunktionen:

$$u_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad U_{\delta}(f) \quad (94)$$

Stellt man das Produkt der beiden Zeitfunktionen auf der linken Seite von (94) durch die inverse Fouriertransformierte ihrer zugehörigen Spektren $U(f)$ und $G(f)$ dar.

$$x_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U(f) \cdot e^{+j2\pi ft} \cdot df \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{+j2\pi ft} \cdot df \right] \quad (95)$$

und benennt die Integrationsvariablen um in v und w , so kann man beide Integranden unter ein Doppelintegral ziehen:

$$x_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) = \int_{w \rightarrow -\infty}^{w \rightarrow +\infty} \int_{v \rightarrow -\infty}^{v \rightarrow +\infty} U(v) \cdot G(w) e^{+j2\pi(v+w)t} \cdot dv \cdot dw \quad (96)$$

Substituiert man die Summe im Exponenten durch die Variable f

$$f = v + w \quad (97)$$

und betrachtet v lediglich als Koordinatenverschiebung nach links, so ergeben sich die gleichen Integralgrenzen wie bei den alten Variablen sowie die Beziehungen für df und die durch f ersetzte Variable w :

$$\begin{aligned} df &= dw \\ w &= f - v \end{aligned} \tag{98}$$

Damit ist der Exponent nur noch von der Variablen f abhängig, so daß sich (96) folgendermaßen zusammenfassen läßt:

$$u_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) = \int_{f \rightarrow -\infty}^{f \rightarrow +\infty} \left[\int_{v \rightarrow -\infty}^{v \rightarrow +\infty} U(v) \cdot G(f - v) \cdot dv \right] e^{+j2\pi(f)t} \cdot df \tag{99}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist das Faltungsintegral für die beiden Spektren, das äußere die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}(U_{\delta}(f))$

Damit ist bestätigt, daß die Multiplikation zweier Zeitfunktionen äquivalent ist zur Faltung der zugehörigen Spektren:

$$x_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_{\delta}(f) = U(f) * G(f) \tag{100}$$

Der Stern * auf der rechten Seite symbolisiert hierbei die Faltung entsprechend dem Integral in der eckigen Klammer von (99).

Die Multiplikation zweier Zeitfunktionen $u(t)$ und $g(t)$ führt im Frequenzbereich zur Faltung der zugehörigen Spektren $U(f)$ und $G(f)$:

$$x_{\delta}(t) = u(t) \cdot g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_{\delta}(f) = U(f) * G(f)$$

3.4.2 Spektrum einer δ -Impulsreihe

Das kontinuierliche Zeitsignal $u(t)$ wird mit der Diracimpulsreihe (92) multipliziert. Die Fouriertransformierte eines Diracimpulses $g_i(t) = \delta(t - i \cdot t_{abt})$ ergibt nach Kap. 3.2.1.1 (Spektrum des Normimpulses und der δ -Distribution) und Kap. 3.2.1.3 (Zeitliche Verschiebung eines Signals um t_{abt}) das Spektrum $G_i(f) = e^{-j2\pi f \cdot i \cdot t_{abt}}$. Damit hat die Fouriertransformierte $G(f)$ der Diracimpulsreihe (92) die Form

$$g(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{abt}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad G(f) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \cdot k \cdot t_{abt}} \quad (101)$$

Dieses Ergebnis hilft hier leider nicht viel weiter. Wenn man aber bedenkt, daß diese Dirac-Impulsreihe auch eine periodische Funktion ist, existiert auch eine **Fourierreihe** von $g(t)$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{abt}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{+j2\pi \frac{k}{t_{abt}} t} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} f_{abt} \cdot X_{gk}(f) \cdot e^{+j2\pi k \cdot f_{abt} \cdot t} \end{aligned} \quad (102)$$

$X_{gk}(f)$ ist das Integral in (66), also das Integral über die Funktion $g(t) \cdot e^{-j2\pi k \cdot f_{abt} \cdot t}$ von $-\frac{t_{abt}}{2}$ bis $+\frac{t_{abt}}{2}$, wobei die Exponentialfunktion den mit $e^{+j2\pi k \cdot f_{abt} \cdot t}$ rotierenden Zeiger zum Stehen bringt. (siehe Kap. 3.1):

$$\begin{aligned} X_{gk}(f) &= \int_{-t_{abt}/2}^{+t_{abt}/2} g(t) \cdot e^{-j2\pi k \cdot f_{abt} \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-t_{abt}/2}^{+t_{abt}/2} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi k \cdot f_{abt} \cdot t} \cdot dt = 1 \end{aligned} \quad (103)$$

Damit lautet die als Fourierreihe dargestellte Diracimpulsreihe

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{\text{abt}}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{abt}} \cdot 1 \cdot e^{+j2\pi \cdot k \cdot f_{\text{abt}} \cdot t} \\
 &= f_{\text{abt}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi \cdot k \cdot f_{\text{abt}} \cdot t}
 \end{aligned} \tag{104}$$

Wenden wir nun auf diese Reihe aus e-Funktionen, hier rotierenden Zeigern im Zeitbereich, die Fouriertransformation an, so erhalten wir mit den Ergebnissen aus Kap. 3.2.1.4 (Verschiebung eines Frequenzspektrums um f_0) mit

$$e^{+j2\pi f_0 t} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \delta(f - f_0) \tag{105}$$

im Frequenzbereich ebenfalls eine Diracimpulsreihe!

$$g_{\delta}(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot t_{\text{abt}}) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad G_{\delta}(f) = f_{\text{abt}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_{\text{abt}}) \tag{106}$$

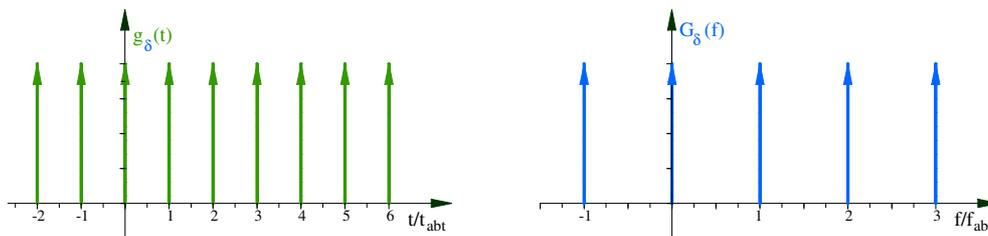


Abb. 48 Spektrum einer $\delta(t)$ -Pulsreihe ist eine $\delta(f)$ -Pulsreihe

3.4.3 Faltung einer Funktion $u(x)$ mit einer δ -Distribution

Eine der beiden durch Faltung verknüpften Funktionen sei die zeit- oder frequenzabhängige Funktion $u(x)$, die andere die um x_0 nach rechts verschobene δ -Distribution $g(x) = \delta(x - x_0)$.

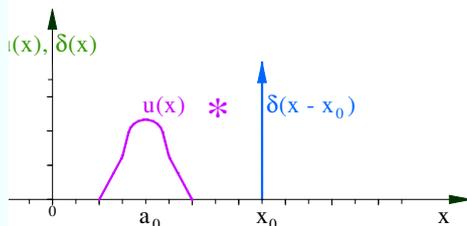
$$u(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - z) \cdot g(z) \cdot dz = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - z) \cdot \delta(z - x_0) \cdot dz \tag{107}$$

Da im Falle einer Frequenzfunktion weder u noch g der Einschränkung der Kausalität unterworfen ist (= Impulsantwort kann im Falle einer Zeitfunktion erst nach dem Eingangsimpuls kommen), ist die Integration beim Faltungssatz bis $-\infty$ ausgedehnt.

Die δ -Distribution verschwindet für $z \neq x_0$. Damit ist der Wert von u ebenfalls nur mehr an der Stelle $z = x_0$ von Interesse und aus (107) wird

$$\begin{aligned} u(x) * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - x_0) \cdot \delta(z - x_0) \cdot dz \\ &= u(x - x_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - x_0) \cdot dz = u(x - x_0) \end{aligned} \quad (108)$$

Die Faltung mit der δ -Distribution $g(x) = \delta(x - x_0)$ verschiebt also den Faltungspartner $u(x)$ nach rechts auf $u(x - x_0)$. Dabei kann der Faltungspartner $u(x)$ auch selbst eine δ -Distribution sein: $u(x) = \delta(x)$



bb. 49 Faltung von Funktion $u(x)$ mit $\delta(x - x_0)$...

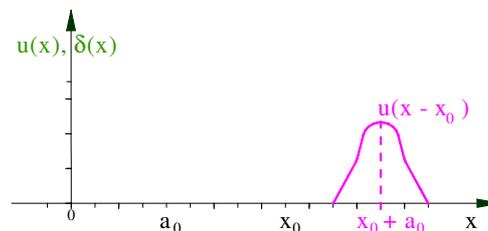


Abb. 50 ... verschiebt $u(x)$ nach $u(x - x_0)$

Ist nun auch $u(x) = U(f)$ eine $\delta(f)$ -Distribution

$$U(f) = \delta(f - f_0) \quad (109)$$

als Fouriertransformierte des mit der (niedrigen) Frequenz f_0 rotierenden Zeigers $e^{j2\pi \cdot f_0 \cdot t}$ im Zeitbereich und

$$G(f) = \delta(f - k \cdot f_{\text{abt}}) \quad (110)$$

die Transformierte des mit der (hohen) Frequenz $k \cdot f_{\text{abt}}$ rotierenden Zeigers $e^{j2\pi \cdot k \cdot f_{\text{abt}} \cdot t}$ im Zeitbereich, so ergibt die Faltung beider Frequenzfunktionen

$$U(f) * G(f) = \delta(f - f_0) * \delta(f - k \cdot f_{\text{abt}}) = \delta(f - (f_0 + k \cdot f_{\text{abt}})) \quad (111)$$

Die aus der Faltung resultierende Funktion ist als wieder eine δ -Distribution bei der Summe beider Frequenzen $k \cdot f_{\text{abt}}$ und f_0 .

Dies ist das wichtigste Ergebnis zur Ermittlung des Spektrums $X_{\delta}(f)$ einer abgetasteten Zeitfunktion $x_{\delta}(t)$ nach (91).

Abb. 51 zeigt die Faltung einer $\delta(f)$ -Distribution bei f_0 für den mit f_0 rotierenden Zeiger im Zeitbereich mit der $\delta(f)$ -Distribution bei $2 \cdot f_{\text{abt}}$, der Fourier-transformierten des mit der doppelten Abtastfrequenz. rotierenden Zeigers im Zeitbereich.

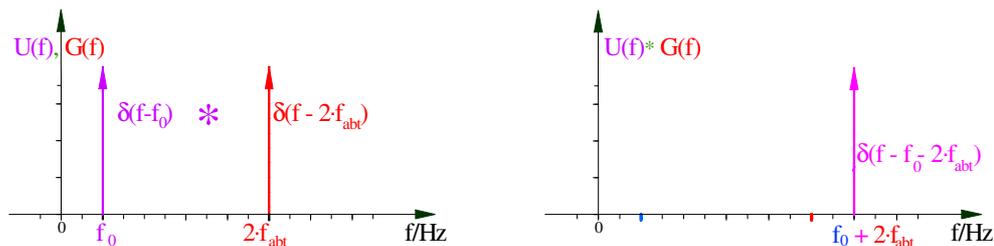


Abb. 51 Faltung eines mit der niedrigen Frequenz f_0 rotierenden Zeigers durch den Zeiger bei der doppelten Abtastfrequenz $2f_{\text{abt}}$

3.4.4 Multiplikation von $u(t)$ mit der $\delta(t)$ -Abtastimpulsreihe

Dieses Ergebnis wenden wir nun konkret auf die Kosinus-Schwingung mit der Frequenz $f_0 = 0.2 \text{ Hz}$ und der Amplitude 2 in Abb. 47 anwenden.

$$\begin{aligned} u(t) &= 2 \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= e^{+j2\pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \end{aligned} \quad (112)$$

Der in mathematisch positiv rotierende Zeiger wird im folgenden blau, der in negativer Richtung rotierende Zeiger rot dargestellt (Abb. 52).

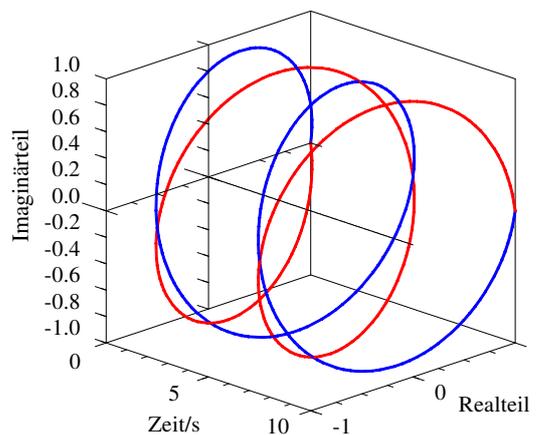


Abb. 52 Spur der beiden mit 0.2 Hz rotierenden Zeiger des Kosinus

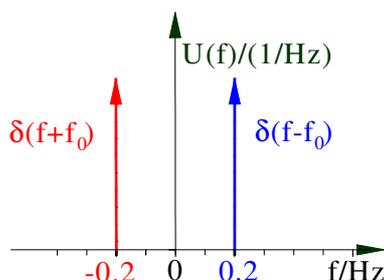


Abb. 53 Spektrum des Kosinus

Die Fourierertransformation führt auf das Spektrum (Abb. 53):

$$U(f) = \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \quad (113)$$

Abgetastet wird der Kosinus durch eine $\delta(t)$ -Impulsreihe mit der Frequenz $f_{\text{abt}} = 1\text{Hz}$. Die beiden mit $f_0 = 0.2\text{Hz}$ rotierenden Zeiger werden also mit der Impulsreihe $g_\delta(t)$ multipliziert. Das $\delta(f)$ -Spektrum $G_\delta(f)$ wird daher mit dem Spektrum $U(f)$ der beiden Zeiger der Kosinusfunktion gefaltet. Wir betrachten nun exemplarisch die Faltung mit $f_{\text{abt}} \cdot \delta(t)$, mit $f_{\text{abt}} \cdot \delta(t - t_{\text{abt}})$ und $f_{\text{abt}} \cdot \delta(t - 2 \cdot f_{\text{abt}})$. Abb. 54 zeigt die Faltungspartner $U(f) = \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)$ und einen Teil $G^*(f)$ des Abtastsignalspektrums $G(f)$,

$$\text{nämlich } G^*(f) = f_{\text{abt}} \cdot \sum_0^2 \delta(f - k \cdot f_{\text{abt}})$$

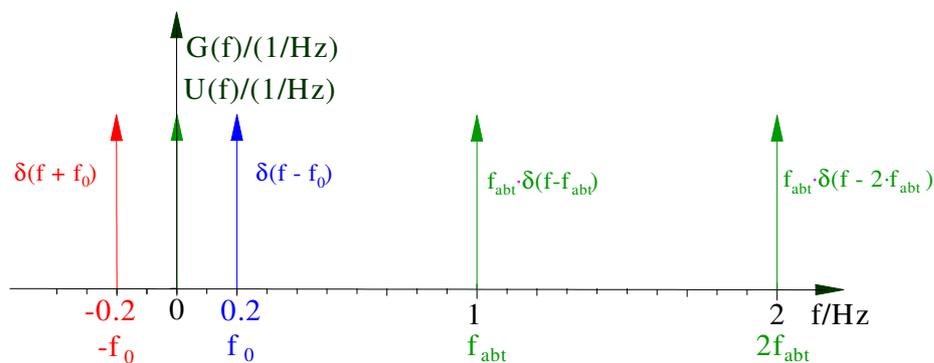


Abb. 54 Faltungspartner Kosinus- und Abtast- δ -Distributionen

Nach der Faltung der beiden Kosinus- $\delta(f)$ -Distributionen mit den drei $\delta(f)$ -Distributionen bleiben nur noch die Distributionen symmetrisch zu den Frequenzen Null, f_{abt} und $2f_{\text{abt}}$ im Abstand $\pm f_0$ übrig. Dabei ist es gleichgültig, ob man sich vorstellt, daß die „Abtast-Distributionen“ durch die „Kosinus-Distributionen“ oder umgekehrt verschoben werden.

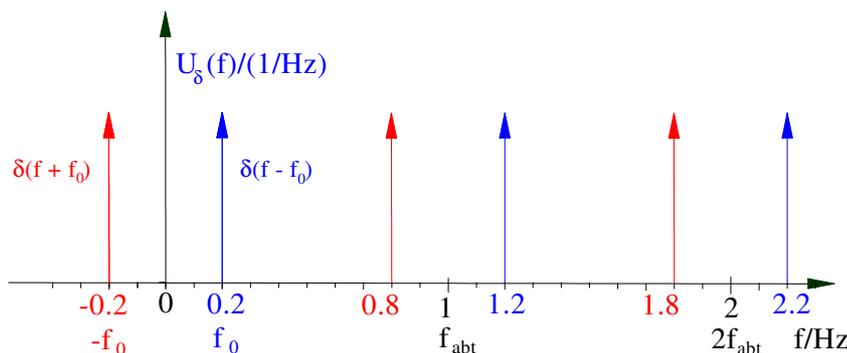


Abb. 55 Ausschnitt aus dem Spektrum des mit 1 Hz abgetasteten Signals

Nach der Faltung von $U(f)$ und $G(f)$ ergibt sich für die abgetastete Kosinusschwingung das Spektrum

$$U_\delta(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} [\delta(k \cdot f_{\text{abt}} - f_0) + \delta(k \cdot f_{\text{abt}} + f_0)] \quad (114)$$

3.4.5 Wiedergewinnung des ursprünglichen Zeitsignals aus dem periodischen Spektrum des abgetasteten Signals

Zum periodischen Spektrum $U_{\delta}(f)$ der $\delta(f)$ -Distributionen, die symmetrisch zu $k \cdot f_{\text{abt}}$ im Abstand $\pm f_0$ liegen, gehört das Zeitsignal der rotierenden Zeiger, die sich im vorliegenden Beispiel mit den Anteilen bei

$$k \cdot f_{\text{abt}} + f_0 \quad \text{und} \quad -(k \cdot f_{\text{abt}} - f_0)$$

bzw. (115)

$$k \cdot f_{\text{abt}} - f_0 \quad \text{und} \quad -(k \cdot f_{\text{abt}} - f_0)$$

zu Kosinusfunktionen bei den entsprechenden Frequenzen mit der Amplitude 2 ergänzen.

Diese rotierenden Zeiger in der unendlichen Summe liefern ja als Fourierreihe mit (104) und (94) die Abtast- $\delta(t)$ -Distributionen des Kosinussignals. Um das ursprüngliche Kosinussignal wieder zurück zu gewinnen, muß man das Spektrum $U_{\delta}(f)$ mit Hilfe eines Filters von den Anteilen höherfrequenten Anteilen befreien und nur die Frequenzen bis $\pm f_{\text{abt}}/2$ durchlassen. Dies schafft ein idealer (analoger) Tiefpaß, dessen Durchlaßkennlinie die Form eines Rechtecks hat:

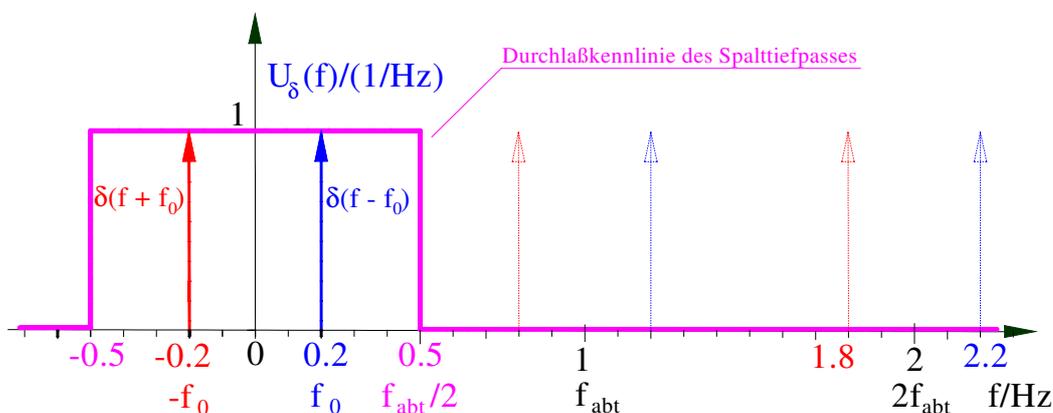


Abb. 56 Regenerierung des kontinuierlichen Signals durch Ausfiltern der periodischen Wiederholungen des Spektrums

Es bleibt also nur das ursprüngliche Spektrum (113) des Kosinus übrig. Da die Wirkung dieses Filters wie das eines (genügend breiten) Spalts auf einen Lichtstrahl ist, der alles innerhalb der Spaltbreite ungeschwächt durchläßt und alles außerhalb völlig abhält, nennt man diesen Tiefpaß auch „Spalt-Tiefpaß“. Diese Tiefpaß-Charakteristik ist allerdings nicht ideal sondern nur näherungsweise realisierbar. Eine erste Näherung etwa ist ein Tiefpaß 1. Ordnung aus Widerstand und Kapazität (Abb. 5).

3.4.6 Das Shannon'sche Abtasttheorem

Vergrößert man in **Abb. 56** die Frequenz f_0 des abgetasteten Signals immer weiter, so rücken die Delta-Distributionen immer näher an die halbe Abtastfrequenz $f_{\text{abt}}/2$ heran, also an die Grenze des Spalttiefpasses, der die Rückgewinnung des analogen Signals $U(f)$ aus dem periodischen Spektrum $U_{\delta}(f)$ vornimmt. Aber auch die zu f_{abt} gehörende $\delta(f)$ -Distribution bei $f_{\text{abt}} - f_0$ rückt näher an diese Grenzfrequenz $f_{\text{abt}}/2$ heran. Sobald die abgetastete Schwingung eine größere Frequenz hat, als die halbe Abtastfrequenz, also $f_0 > f_{\text{abt}}/2$ gilt, taucht die zu f_{abt} gehörige Distribution innerhalb des Durchlaßbereichs des Spalttiefpasses auf und täuscht eine niedrigere Frequenz, nämlich $f_{\text{abt}} - f_0$, vor. Eine weitere Erhöhung von f_0 schließlich führt auf einen scheinbaren Stillstand, als die Frequenz Null, und schließlich sogar auf eine scheinbare Rotation des zugehörigen Zeigers im Zeitbereich in die andere Richtung.

Erhöht man die Frequenz weiter, so verschwindet schließlich dieser Zeiger mit schneller negativer Rotation jenseits der Tiefpaß-Grenzfrequenz $-f_{\text{abt}}/2$. Dafür taucht nun bei der rechten Tiefpaß-Grenzfrequenz die zu $2 \cdot f_{\text{abt}}$ gehörige $\delta(f)$ -Distribution $2 \cdot f_{\text{abt}} - f_0$ mit positiver Rotation des Zeigers im Zeitbereich auf.

Die rotierenden Zeiger sind genau das, was man bei Wildwest-Filmen sehen kann, wenn eine Kolonne Leiterwagen aus voller Fahrt bis in den Stand abbremsen: Weil das analoge Signal des rotierenden Speichenrades durch die 25 Aufnahmen pro Sekunde abgetastet (und in eine Treppenfunktion umgewandelt) wird, drehen sich die Räder aus einer Richtung über den scheinbaren Stillstand hinaus die andere und bei Erreichen der halben Abtastfrequenz wieder zurück über den Stillstand in die eine Richtung, bis die Speichenfrequenz unterhalb 12.5Hz liegt. Kurz vor Stillstand drehen sich die Räder dann immer in der von uns erwarteten Richtung, da hier keine Rückfaltung mehr erfolgt.

Es gilt also auch für abgetastete Schwingungen die Gleichung (114). So würde ein bei $f_0 = 2.8\text{Hz}$ in mathematisch positive Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) rotierender Zeiger im Zeitbereich ebenso als rotierender Zeiger bei 0.2Hz erscheinen wie ein Zeiger, der bei 1.8Hz in dieselbe Richtung rotiert. Ebenso würde ein Zeiger, der sich in die andere Richtung, also mathematisch negative Richtung (im Uhrzeigersinn) mit der Frequenz 1.2Hz dreht, mit der Frequenz 0.2Hz in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) rotierend sichtbar.

3.4.7 Praktische Aspekte der Rückgewinnung des analogen Signals

Nach der Abtastung wird ja die $\delta(t)$ -Impulsfolge durch ein δ -Halteglied mit der Fouriertransformierten

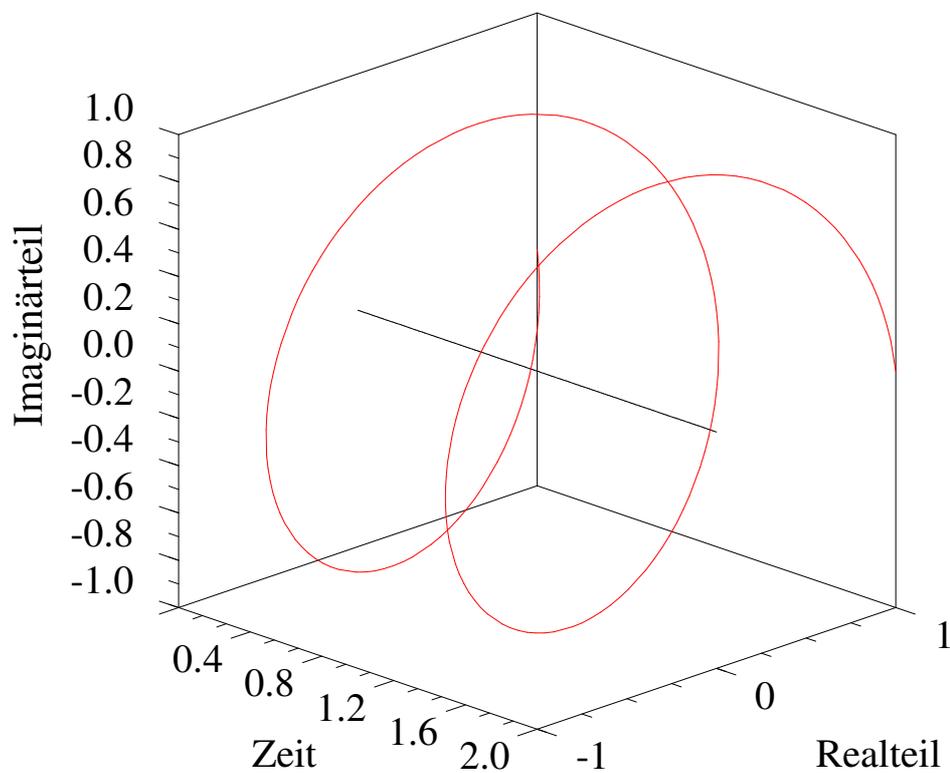
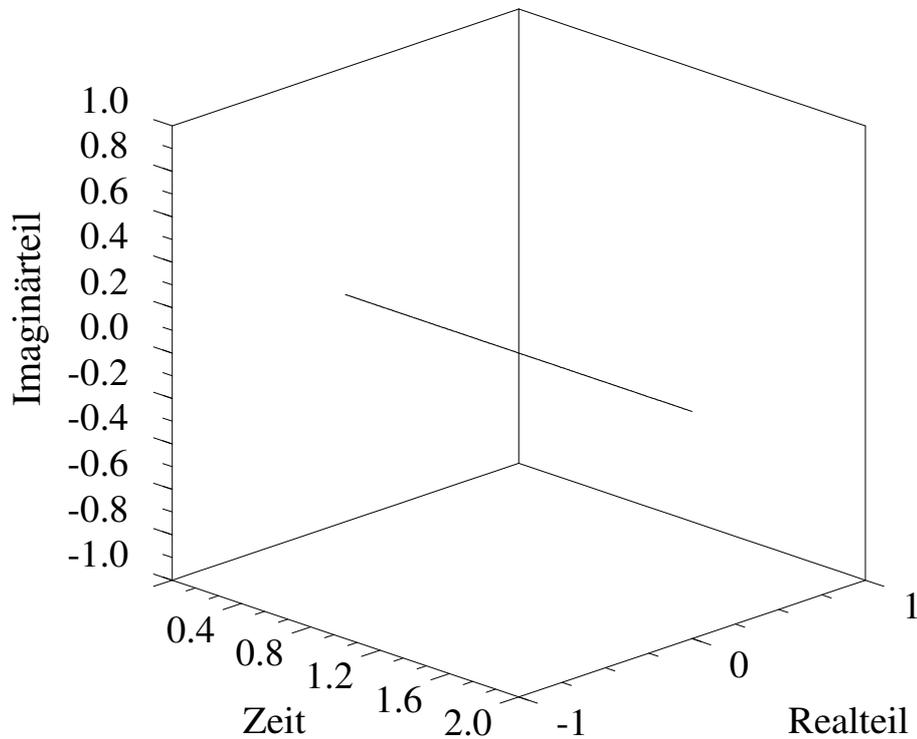
$$X_{Ti}(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi \cdot f \cdot t_{abt}}}{j \cdot 2\pi f} \quad (87)$$

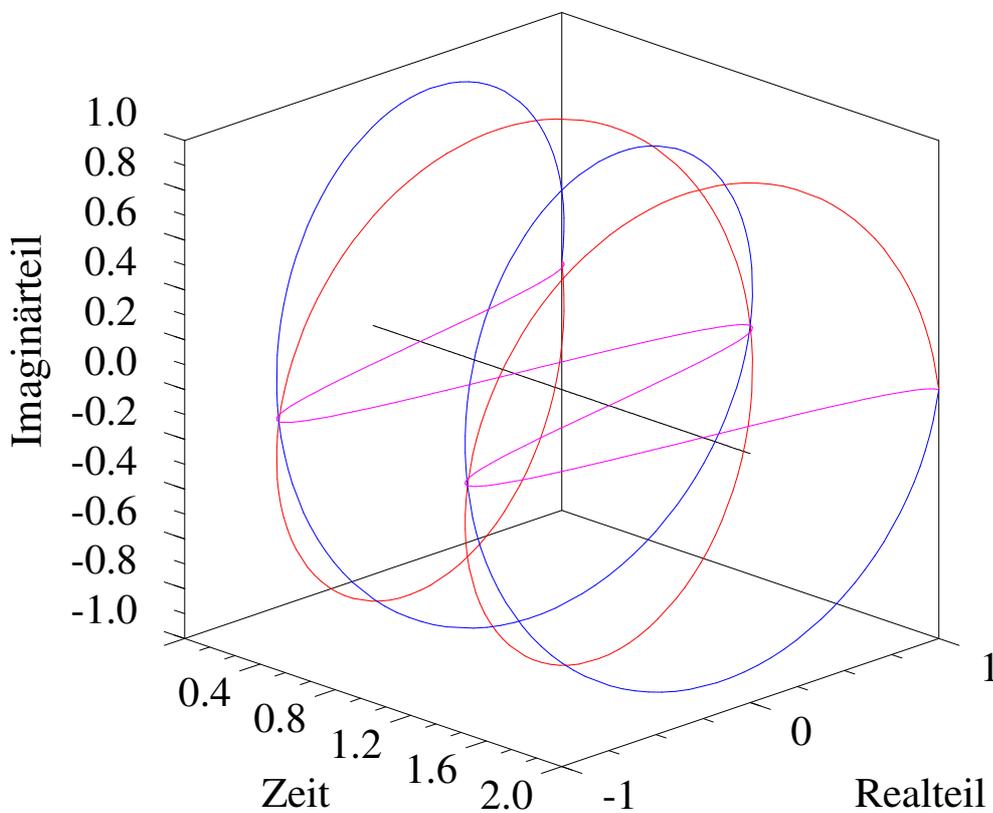
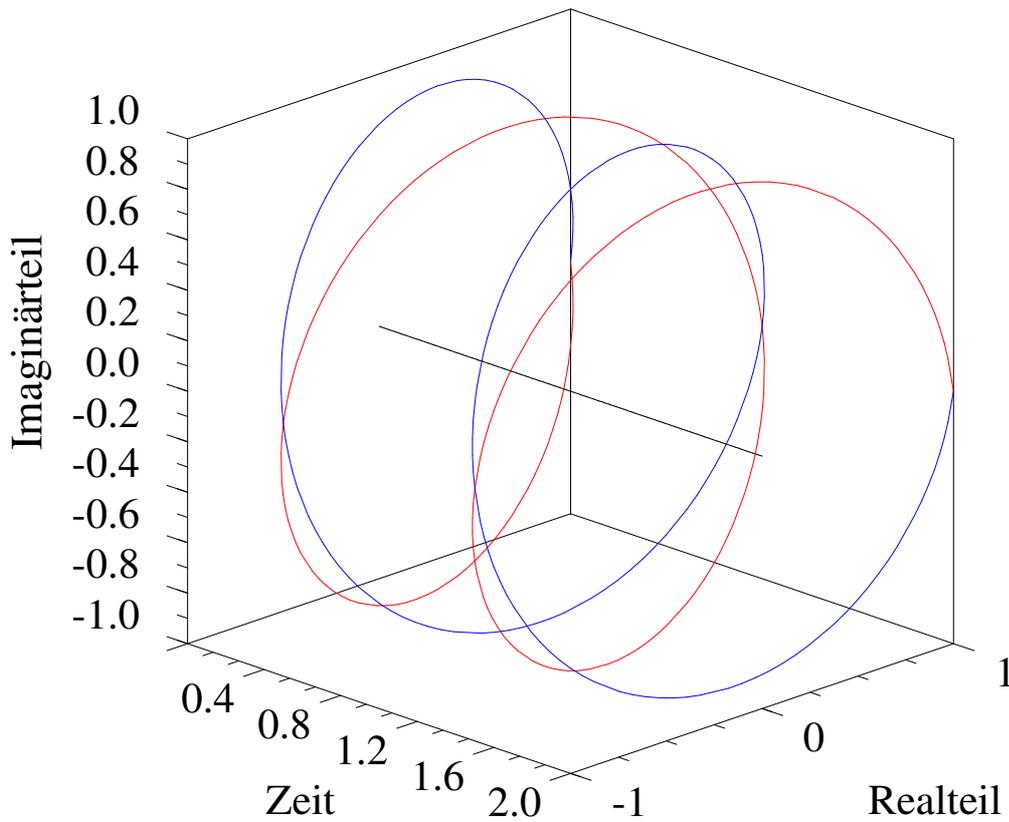
in eine Treppenfunktion umgeformt.

Diese Treppenfunktion wird durch Filter- und Regelalgorithmen bearbeitet, bevor sie wieder über einen D/A-Wandler in eine analoge Treppenfunktion zurückverwandelt wird. Die Umwandlung der Treppenfunktion, die ja durch das periodische Spektrum zustande kommt, in eine „glatte“ Funktion erfolgt über einen analogen Tiefpaß.

Hat man einen schnellen D/A-Wandler zur Verfügung, der eine um den Faktor 10 bis 100 höhere Abtastung erlaubt, so bietet sich bereits auf der Seite der digitalen Signale eine Vorfilterung durch einen digitalen Tiefpaß mit dieser hohen Frequenz an. Betrachtet man den Nenner des Abtast-Halteglieds (87), so sieht man, daß die höheren Frequenzanteile mit wenigstens 20dB pro Dekade gedämpft werden, da mit Verzehnfachung der Frequenz der Betrag des Bruchs um mindestens den Faktor 10 abnimmt. Mit dieser hohen Frequenz ist eine hochwertige Filterung durch einen digitalen Tiefpaß möglich, so daß man sich zur endgültigen Glättung des Analogsignals auf einen einfachen RC-Tiefpaß erster Ordnung beschränken kann.

Bilder zu den rotierenden Zeigern:





Literatur

- [1] Grünigen, D. von Digitale Signalverarbeitung, Carl Hanser Verlag, München, 2004
- [2] Gould B. Digital Processing of Signals, McGraw-Hill Book Company, New York
- Rader C
- [3] Latzel W. Einführung in die digitalen Regelungen, VDI Verlag, Düsseldorf, 1995
- [4] Latzel W. Regelung mit dem Prozeßrechner (DDC), BI-Taschenbuch Verlag, Mannheim 1977
- [5] Dörrscheidt Grundlagen der Regelungstechnik, Teubner Verlag Stuttgart, 1989
- F. Latzel W.
- [6] Föllinger O. Lineare Abtastsysteme, Oldenbourg Verlag München, 1990
- [7] Föllinger O. Laplace- und Fourier-Transformation, AEG-Telefunken, Berlin 1980
- [8] Achilles D. Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung, Springer Verlag, Berlin, 1978
- [9] Höcht J. Zeitverhalten und Stabilität linearer dynamischer Systeme. Lerntext zum "Selbstgesteuerten Lernen", FH München, 2004
- [10]
- [11]
- [12]

Lösung der Übungsaufgaben

Aufgabe 9

Fourierkoeffizienten von Rechtecksignalen gleicher Dauer $\Delta\tau$ aber unterschiedlicher Periode T

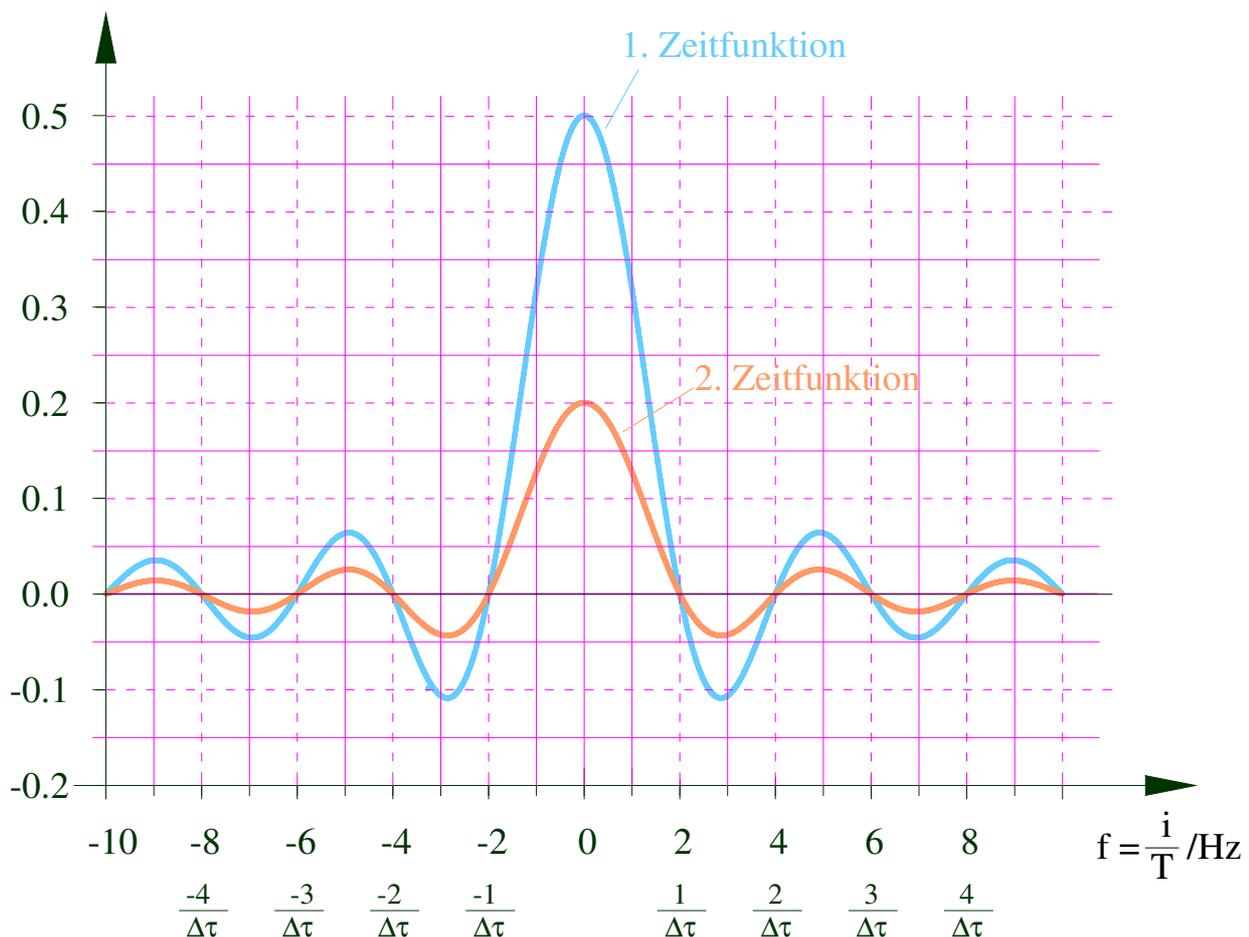
$$\text{Fourierkoeffizienten: } c_i = a \cdot \frac{\Delta\tau}{T} \cdot \frac{\sin \pi \cdot \frac{i}{T} \cdot \Delta\tau}{\pi \cdot \frac{i}{T} \cdot \Delta\tau}$$

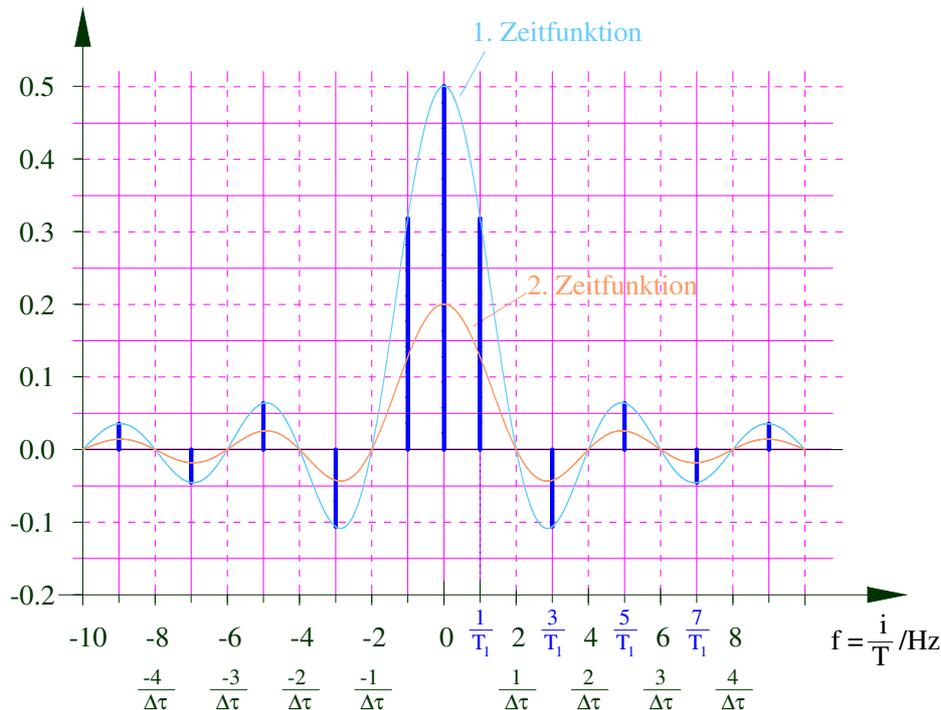
Zahlenwerte: $\Delta\tau = 0.5 \text{ sec}$,
 $a = 1$

1. Zeitfunktion: $T = T_1 = 2 \cdot \Delta\tau = 1.0 \text{ sec}$

2. Zeitfunktion: $T = T_2 = 5 \cdot \Delta\tau = 2.5 \text{ sec}$

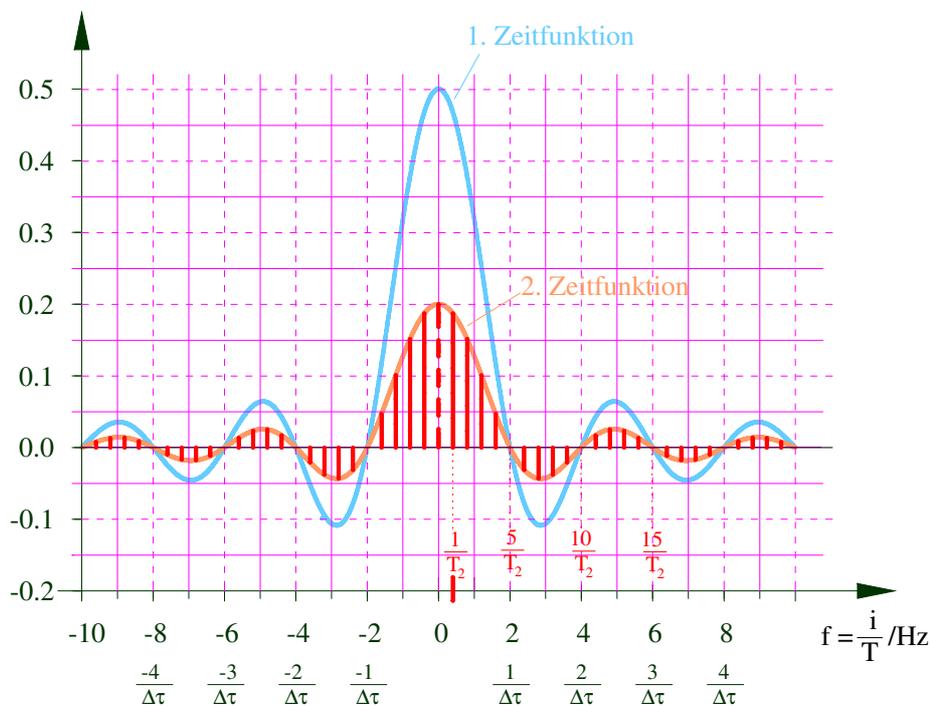
Hüllkurve der Fourierkoeffizienten für die periodische Funktion mit der kleinen Periode $T_1 = 1.0 \text{ sec}$:





Linienspektrum der ersten Zeitkurve mit der kürzeren Periode $T_1 = 1$ sec

Bei dieser Zeitfunktion haben die Spektrallinien den Abstand $\Delta f = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2 \cdot \Delta\tau} = 1.0$ Hz



Linienspektrum der zweiten Zeitkurve mit der längeren Periode $T_2 = 5 \cdot \Delta\tau = 2.5$ sec :

Bei der zweiten Zeitfunktion haben die Spektrallinien den Abstand $\Delta f = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{5 \cdot \Delta\tau} = 0.4$ Hz

Abschließend nochmals beide Linienspektren in einem einzigen Diagramm:

