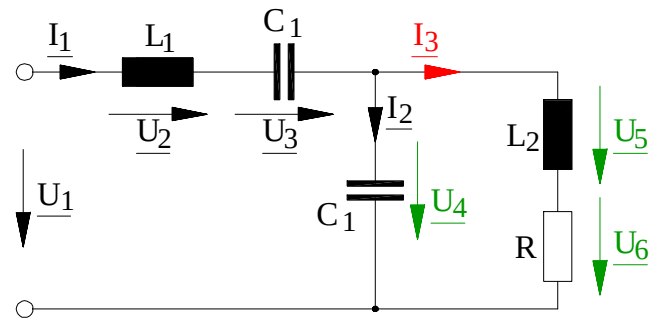


Aufgabe 1

Die gezeichnete Schaltung enthält folgende Schaltelemente:

$R = 1.0\text{k}\Omega$,
 $\omega L_1 = 2.0\text{k}\Omega$, $\omega L_2 = 0.75\text{k}\Omega$, $1/\omega C_1 = 1.0\text{k}\Omega$,
 $1/\omega C_2 = 1.236\text{k}\Omega$.

Die gesamte Schaltung nimmt eine Wirkleistung
 $P = 16\text{mW}$ auf.



1.1 Ermitteln Sie $\underline{I}_3$ und $\underline{U}_6$ (Lösungshinweis: Nur R kann Wirkleistung aufnehmen).

Lösung:

Da nur R Wirkleistung aufnehmen kann, lassen sich $I_{3\text{eff}}$ und $U_{6\text{eff}}$ berechnen. Die Scheitelwerte der Spannungen und damit die Beträge der komplexen Amplituden $\underline{I}_3$ und $\underline{U}_6$ sind dann jeweils das $\sqrt{2}$ -fache.

Im folgenden wird jedoch auf diese Multiplikation der einfacheren Rechnung wegen verzichtet. Die Zeigerdiagramme und die Zahlenwerte sind daher alle um diesen Faktor zu klein!

Damit gilt:

$$P = U_6 \cdot I_3 = U_6^2 / R = I_3^2 \cdot R$$

Da $\underline{U}_6$ und $\underline{I}_3$ die ersten Größen sind, die ermittelt werden, kann der Nullphasenwinkel einer der beiden Größen frei gewählt werden. Wegen des ohmschen Widerstandes hat dann die jeweils andere Größe denselben Nullphasenwinkel.

Ausgangspunkt sei der Strom $\underline{I}_3 = I_3$, dessen Nullphasenwinkel zu Null gesetzt wird, so daß $\underline{I}_3$ ein rein reeller Zeiger und in der Folge auch $\underline{U}_6$ ein Zeiger auf der reellen Achse des Zeigerdiagramms liegt.

Berechnung:

$$U_6 = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{16 \cdot 10^{-3} \text{V} \cdot \text{A} \cdot 1.0 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4.0\text{V}$$

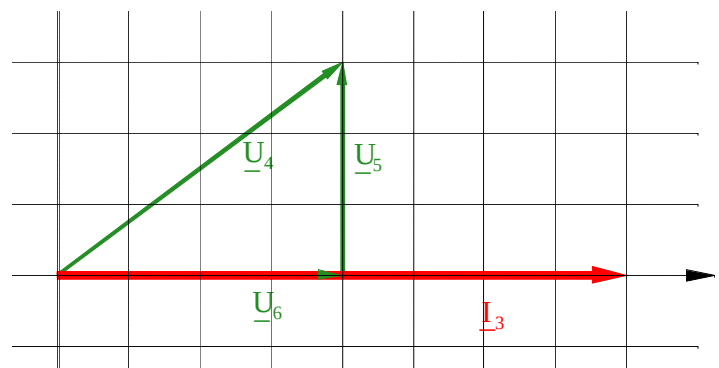
$$I_3 = \frac{U_6}{R} = \frac{4.0\text{V}}{1.0 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4.0\text{mA}$$

1.2 Entwicklung des Zeigerdiagramms für alle Spannungen und Ströme

1.3 Berechnung aller Spannungen und Ströme

1.2.1 Zeigerdiagramm 1. Schritt:

Ausgehend von $\underline{I}_3$ erfolgt mit dem Ohmschen Gesetz für Induktivitäten die Berechnung von $\underline{U}_5$. Damit kann zeichnerisch oder rechnerisch mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel die Spannung $\underline{U}_4$ an der Serienschaltung von R und L_2 ermittelt werden. Diese Spannung liegt auch an C_4 an.



Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

$$|\underline{U}_5| = U_5 = R \cdot I_3 = 1.0\text{k}\Omega \cdot 4.0\text{mA} = 4.0\text{V}$$

Wegen des ohmschen Widerstands haben I_3 und U_6 gleiche Phasenlage.

$$|\underline{U}_5| = U_5 = \omega L_2 \cdot I_3 = 0.75\text{k}\Omega \cdot 4.0\text{mA} = 3.0\text{V}$$

Da bei der Induktivität die Spannung um 90° vorseilt, steht dieser Zeiger nach oben.

Die Maschenregel liefert: $\underline{U}_4 = \underline{U}_5 + \underline{U}_6$

Die Länge U_4 des Zeigers $\underline{U}_4$, also der Betrag $U_4 = |\underline{U}_4|$ ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu

$$U_4 = \sqrt{U_5^2 + U_6^2} = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2} \text{ V} = 5.0\text{V}$$

Berechnung mit Hilfe der komplexen Darstellung:

Da als Ausgangspunkt der gesamten Darstellung der Nullphasenwinkel des Stroms $\underline{I}_3$ zu Null gewählt wurde, ist der komplexe Zeiger $\underline{I}_3 = 4.0\text{mA}$ rein reell ohne Imaginärteil. Damit lassen sich die komplexen Spannungen $\underline{U}_5, \underline{U}_6$ und mit der Kirchhoffschen Maschenregel $\underline{U}_4$ berechnen:

$$\underline{U}_6 = \underline{I}_3 \cdot R = 4.0\text{mA} \cdot 1.0\text{k}\Omega = 4.0\text{V}$$

$$\underline{U}_5 = \underline{I}_3 \cdot j\omega L_2 = 4.0\text{mA} \cdot j0.75\text{k}\Omega = j3.0\text{V}$$

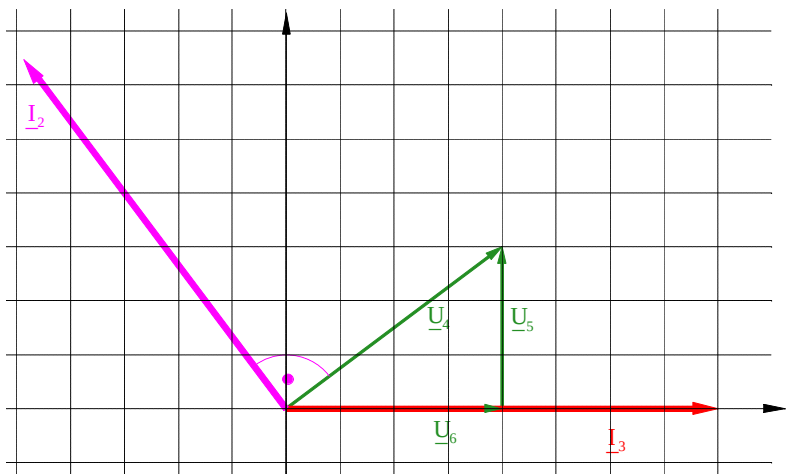
$$\underline{U}_4 = \underline{U}_6 + \underline{U}_5 = 4.0\text{V} + j3.0\text{V}$$

Auch hier ergibt sich der Betrag U_4 der Spannung an der Kapazität C mit Hilfe von Pythagoras:

$$U_4 = |\underline{U}_4| = \sqrt{[\text{Re}(\underline{U}_4)]^2 + [\text{Im}(\underline{U}_4)]^2} = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2} \text{ V} = 5.0\text{V}$$

1.2.2 Zeigerdiagramm 2. Schritt:

Mit Hilfe der Spannung $\underline{U}_4$ läßt sich der Strom $\underline{I}_2$ durch die Kapazität C ermitteln. Der Strom durch eine Kapazität kommt ja um eine Viertelperiode früher, als die Spannung. Deswegen muß der Stromzeiger $\underline{I}_2$ senkrecht zu $\underline{U}_4$ nach oben zeigen. Die Länge des Zeigers muß mit Hilfe des Betrags U_4 der Spannung $\underline{U}_4$ an der Kapazität berechnet werden.



Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

Die Länge I_2 des Stromzeigers $\underline{I}_2$ ergibt sich aus der Länge U_4 des Spannungszeigers und des Betrags des kapazitiven Widerstandes $1/\omega C$:

$$I_2 = |\underline{I}_2| = U_4 \cdot \omega C = 5.0V \cdot \frac{1}{1.236k\Omega} = 4.05mA$$

Berechnung mit Hilfe der komplexen Darstellung:

Der Stromzeiger $\underline{I}_2$ ergibt sich aus der Division des Spannungszeigers

$\underline{U}_4 = 4.0V + j \cdot 3.0V$ und des kapazitiven Widerstandes von C_2 mit

$$\frac{1}{j \cdot \omega C_2} = \frac{1}{j} \cdot 1.236k\Omega = -j \cdot 1.236k\Omega$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_4}{1/j \cdot \omega C_2} = \frac{4.0V + j \cdot 3.0V}{-j \cdot 1.236k\Omega} = -2.43mA + j \cdot 3.24mA$$

Dies ist die Koordinate der Spitze des $\underline{I}_2$ -Zeigers im obigen Zeigerdiagramm. Die Länge des Stromzeigers (= Betrag des Stroms I_2) ergibt sich mit Pythagoras zu

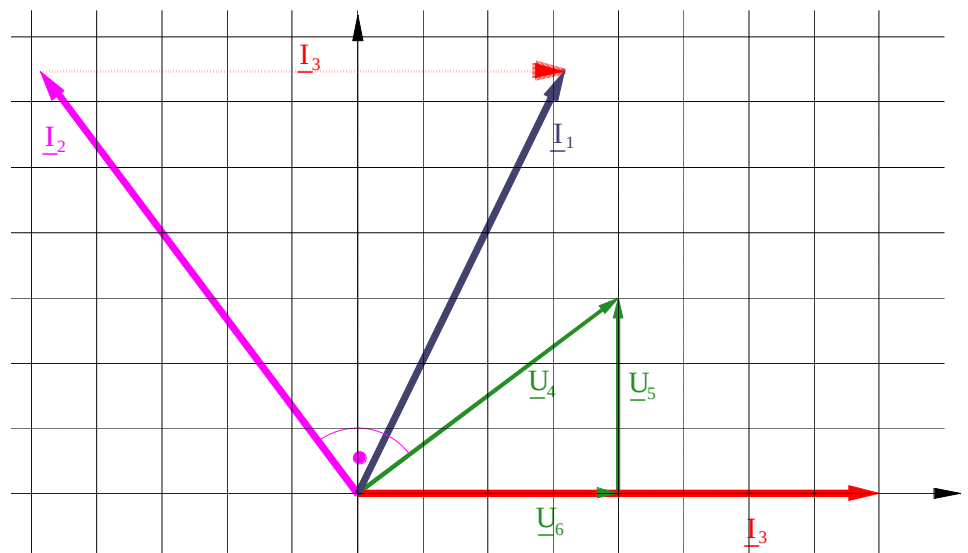
$$I_2 = |\underline{I}_2| = \sqrt{2.43^2 + 3.24^2} \text{ mA} = 4.05mA$$

und liefert dasselbe Ergebnis, wie die Berechnung mit Hilfe der Zeigerdarstellung.

1.2.3 Zeigerdiagramm 3.

Schritt:

Aus den bekannten Strömen $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ läßt sich mit der Kirchhoffschen Knotenpunktregel der Eingangsstrom $\underline{I}_1$ in die Gesamtschaltung ermitteln. Dazu müssen lediglich die beiden Zeiger addiert werden.



Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

Der resultierende Stromzeiger $\underline{I}_1$ kann zwar leicht gezeichnet werden. Da aber hier keine rechten Winkel mehr auftauchen, ist die Berechnung des Betrags I_1 unmittelbar nicht möglich. Bestenfalls läßt sich die Länge direkt aus der Zeichnung ablesen. Hier ist daher für die weiteren Berechnungen der Weg über die komplexe Rechnung erforderlich.

Berechnung mit Hilfe der komplexen Darstellung:

Die komplexe Darstellung der Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ ist von oben her bekannt. Damit lässt sich die Koordinate der Spitze des $\underline{I}_1$ -Zeigers berechnen:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -2.43\text{mA} + j \cdot 3.24\text{mA} + 4.0\text{mA} = 1.57\text{mA} + j \cdot 3.24\text{mA}$$

Der Betrag I_1 ergibt sich mit Pythagoras zu

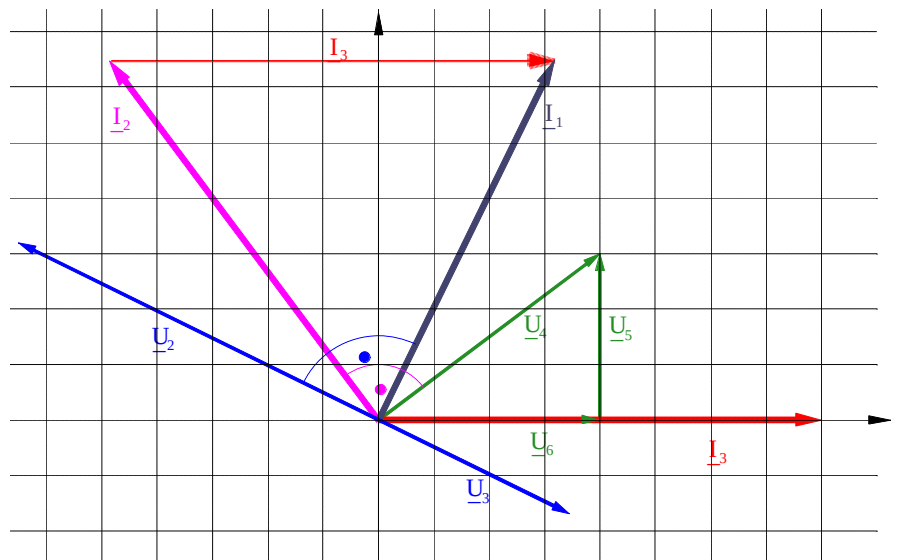
$$I_1 = |\underline{I}_1| = \sqrt{1.57^2 + 3.24^2} \text{ mA} = 3.60\text{mA}$$

Der Nullphasenwinkel φ_{I_1} von $\underline{I}_1$ folgt aus Real- und Imaginärteil mit der Tangensfunktion:

$$\varphi_{I_1} = \arctg \frac{\text{Im}\{\underline{I}_1\}}{\text{Re}\{\underline{I}_1\}} = \arctg \frac{3.24}{1.57} = 64.15^\circ$$

1.2.4 Zeigerdiagramm 4. Schritt:

Nachdem nun der Eingangsstrom $\underline{I}_1$ nach Betrag und Phase bekannt ist, lassen sich auch mit Hilfe des Zeigerdiagramms die Spannungen an der Induktivität L_1 und der Kapazität C_1 ermitteln. Gegenüber dem eben ermittelten Stromzeiger $\underline{I}_1$ eilt die Spannung $\underline{U}_2$ an der Induktivität um 90° **vor**, die Spannung an der Kapazität um 90° **nach**. Mit dem Ergebnis für



$I_1 = |\underline{I}_1| = 3.60\text{mA}$ und den Widerstandswerten für L_1 und C_1 lassen sich auch die Längen der beiden Spannungszeiger berechnen und in das Zeigerdiagramm eintragen.

Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

Die Länge U_2 des Spannungszeigers $\underline{U}_2$ an der Induktivität L_1 wird berechnet aus dem Betrag des Eingangsstroms I_1 und dem induktiven Widerstand ωL_1 :

$$U_2 = |\underline{U}_2| = I_1 \cdot \omega L_2 = 3.60\text{mA} \cdot 2.0\text{k}\Omega = 7.20\text{V}$$

Analog ergibt sich der Spannungsabfall U_3 längs der Kapazität C_1 :

$$U_3 = |\underline{U}_3| = \frac{I_1}{\omega C_1} = 3.60\text{mA} \cdot 1.0\text{k}\Omega = 3.60\text{V}$$

Berechnung mit Hilfe der komplexen Darstellung:

Die Koordinaten der Zeigerspitzen von $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_3$ ergeben sich aus der Multiplikation des komplexen Eingangsstroms $\underline{I}_1$ mit den Blindwiderständen $j \cdot \omega L_1$ und $1/j \cdot \omega C_1$:

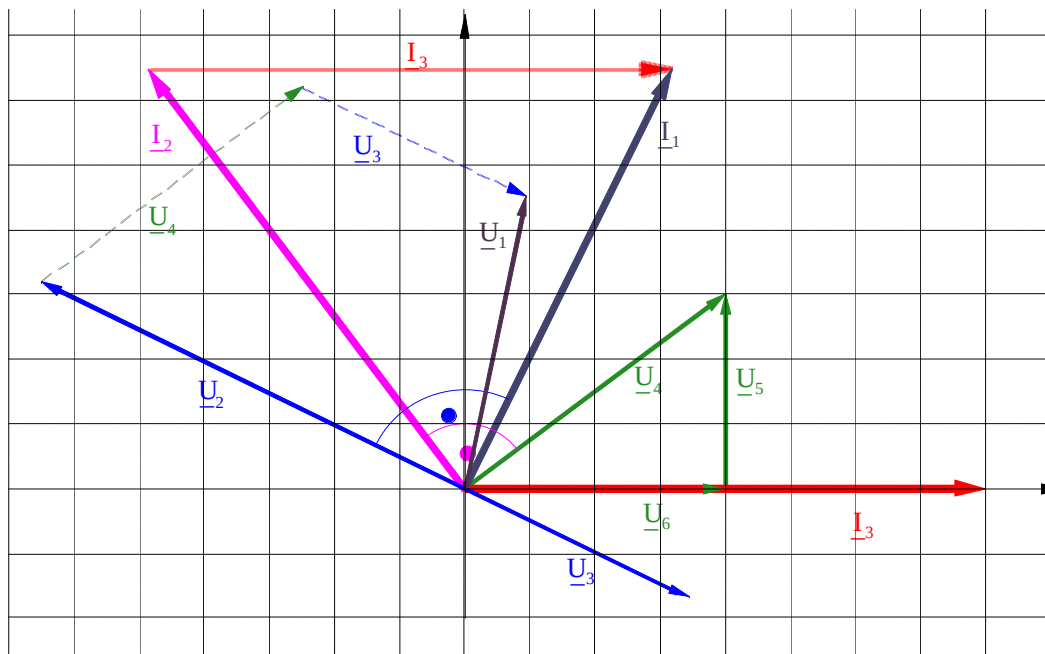
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \cdot j \cdot \omega L_1 = (1.57\text{mA} + j \cdot 3.24\text{mA}) \cdot j \cdot 2.0\text{k}\Omega = -6.48\text{V} + j \cdot 3.14\text{V}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega C_1} = (1.57\text{mA} + j \cdot 3.24\text{mA}) \cdot \frac{1}{j} \cdot 1.0\text{k}\Omega = +3.24\text{V} - j \cdot 1.57\text{V}$$

1.2.5 Zeigerdiagramm 5. Schritt:

Die Eingangsspannung $\underline{U}_1$ folgt aus der Kirchhoffschen Maschengleichung

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4$$



Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms:

Die Eingangsspannung $\underline{U}_1$ läßt sich nur im Rahmen der Zeichengenauigkeit graphisch ermitteln. Dazu werden die Zeiger $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ und $\underline{U}_4$ aneinandergehängt. Die Länge des Zeigers muß gemessen und mit dem Zeichnungsmaßstab in den Betrag U_1 der Eingangsspannung $\underline{U}_1$ umgerechnet werden. Ebenso kann die Phasenlage ϕ_{U_1} der Eingangsspannung als Winkel zwischen dem Zeiger $\underline{U}_1$ und der Abszisse (= reelle Achse) ermittelt werden. Genauer und einfacher ist hier aber die Berechnung mit Hilfe der obigen Ergebnisse.

Berechnung mit Hilfe der komplexen Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 & + \underline{U}_3 & + \underline{U}_4 = \\ &-6.48\text{V} + j \cdot 3.14\text{V} & + 3.24\text{V} - j \cdot 1.57\text{V} & + 4.0\text{V} + j \cdot 3.0\text{V} = \\ &0.76\text{V} + j \cdot 4.57\text{V} \end{aligned}$$

Für den mit dem Voltmeter meßbaren Betrag der Eingangsspannung U_1 gilt:

$$U_1 = |\underline{U}_1| = 4.63\text{V}$$

Der Nullphasenwinkel φ_u der Spannung beträgt

$$\varphi_u = \arctg \frac{\text{Im}\{\underline{U}_1\}}{\text{Re}\{\underline{U}_1\}} = \arctg \frac{4.57}{0.76} = 80.56^\circ$$

Mit dem Nullphasenwinkel φ_{I_1} des Stroms $\underline{I}_1$ aus 1.2.3 folgt für die Phasenverschiebung φ zwischen Eingangsspannung $\underline{U}_1$ und Eingangsstrom $\underline{I}_1$:

$$\varphi = \varphi_{U_1} - \varphi_{I_1} = 80.56^\circ - 64.15^\circ = 16.41^\circ$$

1.2 Gesamtimpedanz der Schaltung

Lösung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

Aus dem Zeigerdiagramm sind die Spannung $U_1 = |\underline{U}_1|$, der Strom $I_1 = |\underline{I}_1|$ und die Phasenverschiebung j bekannt. Damit ergibt sich die Impedanz $Z = \frac{U_1}{I_1}$ und der komplexe Widerstand $\underline{Z} = \frac{U_1}{I_1} \cdot e^{j16.41^\circ} = \frac{U_1}{I_1} (\cos 16.41^\circ + j \cdot \sin 16.41^\circ)$

Lösung mit Hilfe der komplexen Rechnung:

Hier ist es zunächst zweckmäßiger, den komplexen Widerstand $\underline{Z} = \frac{U_1}{I_1}$ zu berechnen. Der

Betrag des komplexen Widerstandes $|\underline{Z}|$ ergibt dann die Impedanz, der Winkel $\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}\}}$ des komplexen Widerstandes liefert die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

Berechnung mit Hilfe des Zeigerdiagramms

$$Z = \frac{U_1}{I_1} = \frac{4.63\text{V}}{3.60\text{mA}} = 1.286\text{k}\Omega$$

$$\underline{Z} = 1.268 \cdot e^{j16.41^\circ} \text{ k}\Omega = 1.286\text{k}\Omega \cdot (0.959 + j \cdot 0.283) = 1.23\text{k}\Omega + j \cdot 0.36\text{k}\Omega$$

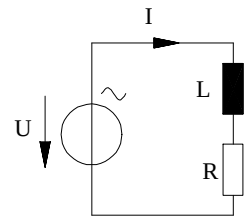
Berechnung mit Hilfe der komplexen Rechnung

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{0.76\text{V} + j \cdot 4.57\text{V}}{1.57\text{mA} + j \cdot 3.24\text{mA}} = \frac{(0.76 + j \cdot 4.57) \cdot (1.57 - j \cdot 3.24)}{(1.57 + j \cdot 3.24) \cdot (1.57 - j \cdot 3.24)} \\ &= (1.23 + j \cdot 0.36)\text{k}\Omega = 1.282\text{k}\Omega \cdot e^{j16.3^\circ} \end{aligned}$$

Die geringfügigen Unterschiede beim der Impedanz und der Phasenverschiebung ergeben sich aus den Rundungsfehlern

Aufgabe 2

Eine Leuchtstoffröhre mit Vorschalt-drossel (Induktivität u.a. zur Strombegrenzung) wird dargestellt als Serienschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer idealen Spule (Induktivität L) ohne Verluste. Der ohmsche Widerstand nimmt eine Wirkleistung $P = 40\text{W}$ auf. Durch die Leuchtstoffröhre fließe ein Strom $I_{\text{eff}} = 0.40\text{A}$. Die Gesamtschaltung liegt am Wechselstromnetz ($f = 50\text{Hz}$) mit $U_{\text{eff}} = 230\text{V}$.



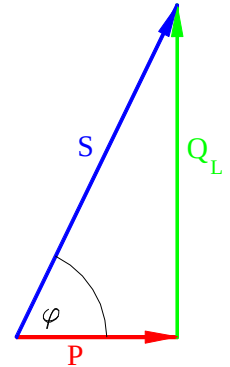
2.1 Scheinleistung S

$$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 230\text{V} \cdot 0.40\text{A} = 92\text{VA}$$

2.2 Leistungsdreieck

Komplexe Leistung aus der Wirkleistung P des ohmschen Verbrauchers und der Blindleistung Q_L der Induktivität: $\underline{S} = P + jQ_L$

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q_L^2}, \quad \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{40\text{W}}{92\text{VA}} = 0.43$$



2.3 Größe des ohmschen Widerstands R und des Blindwiderstands ωL

Lösungsweg:

R : Strom I und Wirkleistung sind bekannt. Daraus ergibt sich R

ωL : Die Blindleistung ergibt sich aus dem Leistungsdreieck. Mit dem Strom I ergibt sich daraus der Blindwiderstand ωL .

Berechnung:

$$R: \quad P = I^2 \cdot R \quad \rightarrow \quad R = \frac{P}{I^2} = \frac{40\text{W}}{0.40^2 \cdot \text{A}^2} = 250\Omega$$

$$\omega L: \quad Q_L = I^2 \cdot \omega \cdot L \quad \rightarrow \quad \omega L = \frac{Q_L}{I^2}$$

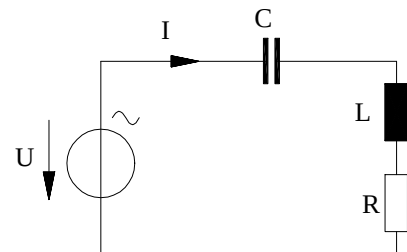
$$Q_L = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{92^2 - 40^2} \text{ var} = 82.8 \text{ var} \quad \omega L = \frac{82.8 \cdot \text{V} \cdot \text{A}}{0.40^2 \cdot \text{A}^2} = 518\Omega$$

2.3 Kompensation der induktiven Blindleistung

Lösungsweg:

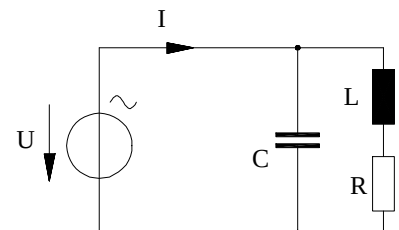
Zur Kompensation der induktiven Blindleistung gibt es folgende 2 Möglichkeiten:

- Serienschaltung einer Kapazität C
- Parallelstellung einer Kapazität C



Bei der Serienschaltung einer Kapazität ändert sich der Strom durch die Leuchtstoffröhre. Daher ist diese Möglichkeit der Kompensation nicht möglich, da sich dann die Leistung der Leuchtstoffröhre ändern würde. Somit bleibt die übliche Art der Kompensation parallel zum Verbraucher, bei der die Kapazität zur Kompensation an derselben Spannung liegt, wie der Verbraucher.

Zur Kompensation muß die induktive Blindleistung des Verbrauchers Q_L gleich der kapazitiven Blindleistung Q_C sein.



Berechnung Variante 1

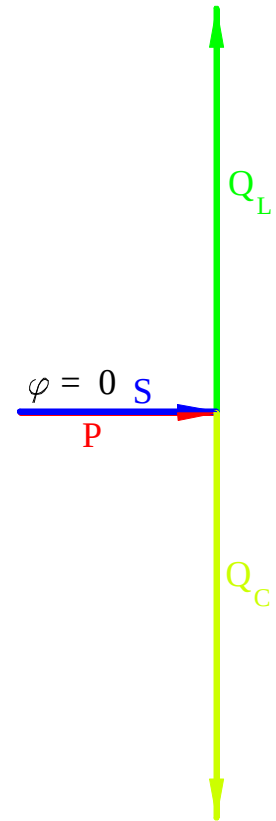
An der Kapazität C liegt die Netzspannung $U = 230\text{V}$. Die kapazitive Blindleistung muß $Q_L = 82.8\text{var}$ sein.

$$Q_C = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = U_{\text{eff}}^2 \cdot \omega \cdot C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{Q_L} = \frac{230^2 \cdot \text{V}^2}{82.8 \cdot \text{V} \cdot \text{A}} = 639\Omega$$

Achtung! Der kapazitive Widerstand $1/\omega C$ ist **nicht** gleich dem induktiven Widerstand ωL , obwohl die Blindleistungen beider Schaltelemente gleich groß sind! Ursache hierfür ist, daß an C die volle Netzspannung liegt, während an L nur ein Teil davon abfällt. Diese Zusammenhänge werden in der zweiten, etwas komplizierteren Berechnungsart deutlich.

$$\frac{1}{\omega \cdot C} = 638.9\Omega \quad \rightarrow$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{s} \cdot 638.9 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 4.98 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 4.98\mu\text{F}$$



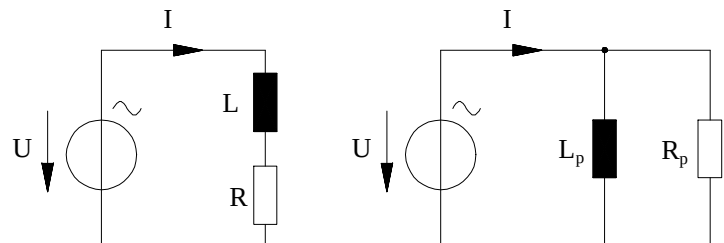
Berechnung Variante 2

Die Serienschaltung der Leuchtstoffröhre mit Widerstand R und der Drossel mit der Induktivität L wird im folgenden dargestellt als komplexer Widerstand $\underline{Z}$ und als Leitwert $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega L = 250\Omega + j \cdot 518\Omega$$

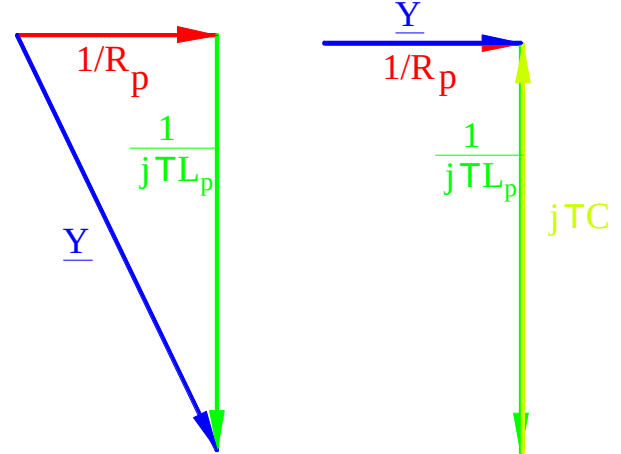
$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1 \cdot \text{A}}{(250 + j \cdot 518) \cdot \text{V}} = \frac{(250 - j \cdot 518) \cdot \text{A}}{(250 + j \cdot 518) \cdot (250 - j \cdot 518) \cdot \text{V}} \\ &= (0.756 - j \cdot 1.566) \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{V}} = \\ &= \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j \cdot \omega L_p} = \frac{1}{1.323\text{k}\Omega} + \frac{1}{j \cdot 639\Omega} \end{aligned}$$

Die **Serienschaltung** aus Leuchtstoffröhre und Drossel läßt sich also völlig **äquivalent** darstellen als **Parallel-**schaltung eines anderen ohmschen Widerstandes $R_p = 1.323\text{k}\Omega$ und einer anderen Induktivität mit dem Blindwiderstand $\omega L = 639\Omega$.



Der Zahlenwert des induktiven Parallelwiderstandes ωL_p ist gleich dem oben berechneten Wert

des kapazitiven Kompensationswiderstandes $\frac{1}{\omega C}$. Daraus folgt, daß die Parallelschaltung der Kapazität zur Induktivität L_p und zum ohmschen Widerstand R_p auf einen rein ohmschen Gesamtleitwert $\underline{Y} = |\underline{Y}| = Y$ und damit natürlich auch ohmschen Gesamtwiderstand $R_p = 1.323\text{k}\Omega$ führt, der an 230 V die gleiche Wirkleistung aufnimmt, wie die Leuchtstoffröhre mit $R = 250\Omega$ an der niedrigeren Spannung $0.4\text{A} \cdot 250\Omega = 100\text{V}$.



Die nebenstehenden Zeigerdiagramme zeigen die Leitwerte vor- und nach der Kompensation. Vor der Kompensation Nach der Kompensation

